



GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2008

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE

Tyd: 3 uur

300 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 19 bladsye en 'n byvoegsel van 4 bladsye (i–iv) wat formule-blaaie bevat. Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
2. Hierdie vraestel bestaan uit **vier** modules, waarvan **twee** beantwoord moet word.

MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA (200 punte) is verpligtend.

Kies **EEN** van die **DRIE** Opsionele Modules:

MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF

MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF

MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte)

3. Nie-programmeerbare en nie-grafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
 4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
 5. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
 6. Skryf al jou antwoorde in die afsonderlike Antwoordboek wat voorsien is.
-

MODULE 1 CALCULUS EN ALGEBRA**VRAAG 1**

1.1 (a) Faktoriseer $x^3 - 1$. (1)

(b) Los vervolgens $x^3 - 1 = 0$ op vir $x \in \mathbb{C}$. (5)

1.2 Indien $1 - \sqrt{2}$ en $1 + \sqrt{2}$ albei nulpunte van $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 10x - 5$ is, faktoriseer $f(x)$ volledig vir $x \in \mathbb{C}$. (10)

16 punte

VRAAG 2

2.1 Los op vir x :

(a) $\log_{0,1}(x - 20) + \log 2x = 1$ (4)

(b) $\frac{e^x}{e^x - 1} = 5$, korrek tot 2 desimale plekke (4)

(c) $|x|^2 - 4|x| - 12 = 0$ (6)

2.2 Die klankintensiteit D , gemeet in desibel (dB), word gegee deur die formule

$$D = 10 \log \left(\frac{L}{10^{-16}} \right)$$

waar L die sterkte van die klank in watt per vierkante sentimeter (W / cm^2) en $10^{-16} \text{ W} / \text{cm}^2$ die sterkte van klank net onder die gehoordrempel is.

Bepaal die sterkte van die klank L (in W / cm^2) wat ervaar word deur die gehoor wat voor 'n orkes sit, gemeet op 107 dB. (6)

20 punte

VRAAG 3

Jodi het min tyd gehad gedurende sy voorbereidende eksamen vir Gevorderdeprogram-wiskunde en het die volgende vraag slegs gedeeltelik beantwoord.

'Bewys deur die beginsel van wiskundige induksie dat $x^n - y^n$ deelbaar is deur $x - y$ vir alle $n \in \mathbb{N}$ '.

Sy gedeeltelike oplossing volg.

Voltooi sy bewys deur by Stap 3 te begin en skryf die finale gevolgtrekking.

Hy het geskryf ...

Stap 1

Bewys stelling waar vir $n = 1$.

LK: $x^1 - y^1$ wat duidelik deelbaar is deur $x - y$

Stap 2

Veronderstel stelling waar vir $n = k$.

LK: $x^k - y^k = p(x - y)$

Stap 3

Bewys waar vir $n = k + 1 \dots$

12 punte

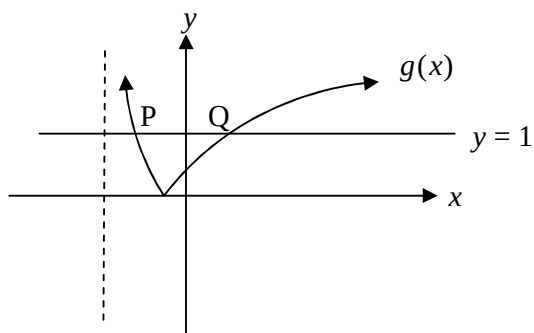
VRAAG 4

4.1 Gegee: $f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{3e^x}$

(a) Vereenvoudig $f(x)$ tot die vorm $f(x) = ke^x + m$. (2)

(b) Skets vervolgens $f(x)$ en dui afsnitte en asimptote duidelik aan. (4)

4.2 Die skets toon die kromme van $g(x) = |\log(2x + 3)|$ wat die lyn $y = 1$ by P en Q sny.



Bepaal die x-koördinate van die punte P en Q, die sny punte van $g(x)$ en die lyn $y = 1$. (6)

12 punte

VRAAG 5

Gegee die funksie: $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{indien } x \geq 1 \\ -4x + 5 & \text{indien } x < 1 \end{cases}$

5.1 Bepaal die waarde van a indien f kontinu is by $x = 1$. (5)

5.2 In die veronderstelling dat $a = 2$, bewys dat f differensieerbaar is by $x = 1$. (9)

14 punte

VRAAG 6

$$g(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}$$

- 6.1 Bepaal die x -afsnitte van die grafiek van g . (2)
- 6.2 Bepaal die vergelykings van enige vertikale en horisontale asimptote. (7)
- 6.3 Bepaal, en vereenvoudig, 'n uitdrukking vir $g'(x)$, die afgeleide van $g(x)$. (8)
- 6.4 Stel vas of g enige draaipunte (lokale maksima of minima) het. (3)
- 6.5 Skets die grafiek van g en toon alle x - en y -afsnitte en asimptote. (7)

27 punte

VRAAG 7

- 7.1 Bepaal $f'(x)$ indien $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$. (6)
- 7.2 Bewys dat $\frac{d}{dx} (\sin x \cos(a - x)) = \cos(a - 2x)$. (7)

Jou berekening moet duidelik toon dat jy die identiteit bewys het.

13 punte

VRAAG 8

Die koördinate van elke punt $(x; y)$ van 'n grafiek word gegee as $(3t + 1; t^2)$,

d.w.s. $x = 3t + 1$ en $y = t^2$ waar $t \in \mathbf{R}$.

- 8.1 Bepaal 'n uitdrukking in terme van t vir $\frac{dy}{dx}$. (4)
- [Wenk: Gebruik die feit dat $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$.]
- 8.2 Bepaal die koördinate van die punt op die grafiek waar die gradiënt gelyk is aan 2. (5)

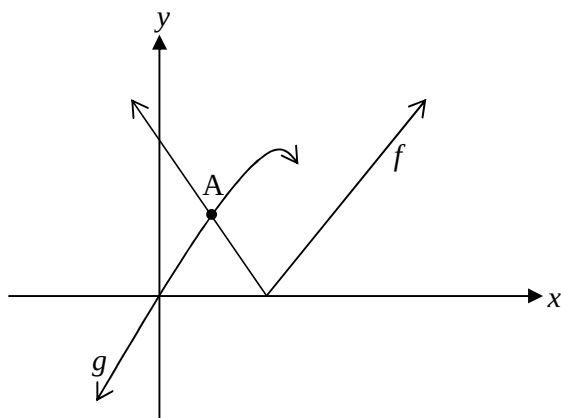
9 punte

VRAAG 9

Gedeeltes van die funksies

$$f(x) = |x-1| \text{ en } g(x) = x(x-2)(x-3)$$

wat by A sny, word getoon.



9.1 Gee sonder berekening die aantal oplossings vir die vergelyking

$$|x-1| = x(x-2)(x-3). \quad (2)$$

9.2 Gee 'n ruwe skatting van die x -koördinaat by A. (1)

9.3 Gebruik Newton se metode om die x -koördinaat by A te bepaal, korrek tot 6 desimale plekke. (10)

13 punte

VRAAG 10

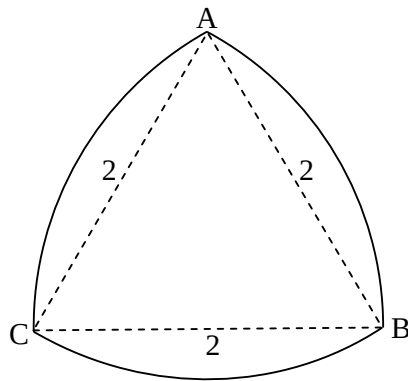
'n Derdegraadskromme van die vorm $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ het 'n buigpunt by $(2; -22)$. Die grafiek gaan deur die oorsprong en het 'n gradiënt van -3 by die oorsprong.

10.1 Toon dat $b = -6a$. (5)

10.2 Bepaal die vergelyking van die grafiek deur die waardes van a , b , c en d te vind. (9)

14 punte

VRAAG 11



'n Muntstuk word ontwerp deur met 'n gelyksydige driehoek ABC met sye 2 cm te begin. Met middelpunt A word 'n sirkelboog getrek wat B met C verbind. Soortgelyke boë met middelpunte B en C verbind onderskeidelik C met A en A met B .

11.1 Bepaal die omtrek van die muntstuk. (3)

11.2 Bepaal die oppervlakte van die gesig van die muntstuk. (8)

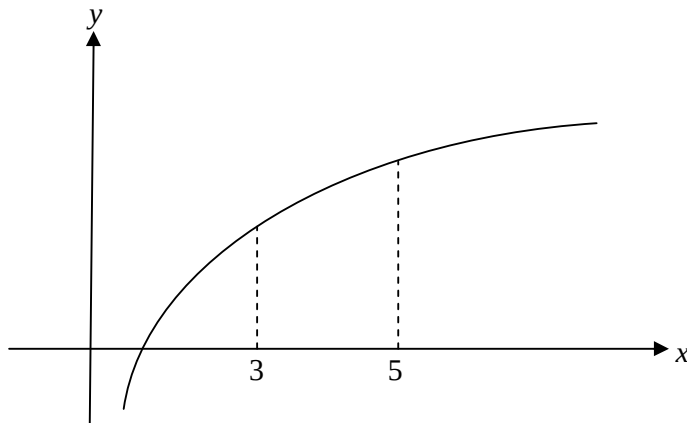
11 punte

VRAAG 12

- 12.1 Bepaal sonder die gebruik van 'n sakrekenaar die waarde van die integraal korrek tot 2 desimale plekke.

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad (10)$$

12.2



Die grafiek van $y = \ln x$ word getoon.

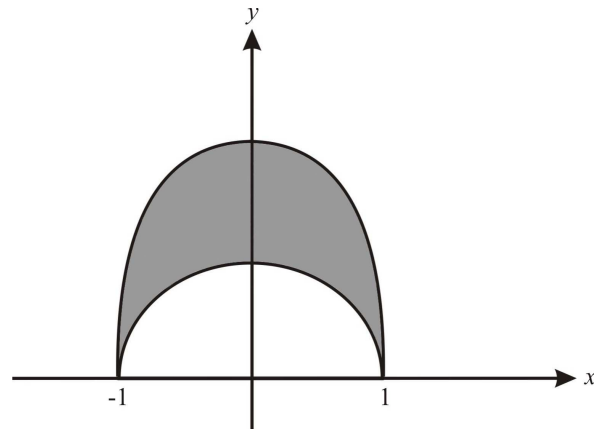
- (a) Bepaal 'n benadering (groter as die werklike waarde) vir die oppervlakte wat ingesluit word deur die grafiek, die x -as en die lyne $x = 3$ en $x = 5$ deur 5 reghoeke van gelyke breedte te gebruik. (10)
- (b) Nou word gegee dat:

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + C \quad \text{waar } C \text{ 'n konstante is.}$$

Gebruik hierdie resultaat om die presiese oppervlakte van die gebied gedefinieer in deel (a) te bepaal, korrek tot 3 desimale plekke. (6)

26 punte

VRAAG 13



Die oppervlakte wat tussen die gedeeltes van twee krommes $x^2 + y^2 = 1$ en $4x^2 + y^2 = 4$ ingesluit word, word deur 2π radiale om die x -as geroteer.

Bepaal die volume van die vaste liggaam wat gevorm word.

13 punte

Totaal vir Module 1: 200

MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

Die geboortegewig van babas in Suid-Afrika is normaal verdeel en het 'n gemiddelde van 3 118 g en 'n standaardafwyking van 850,5 g. Die babas van 40 vroue wat maandeliks voorgeboortesorg ontvang het, het 'n gemiddelde geboortegewig van 3 345 g.

- 1.1 Skryf 'n geskikte nulhipotese (H_0) en 'n alternatiewe hipotese (H_1) neer om te toets of maandelikse voorgeboortesorg 'n verskil maak aan die geboortegewig van babas. (4)
- 1.2 Gebruik 'n 5%-betekenispeil om die hipotese in 1.1 hierbo te toets. (7)
- 1.3 Watter minimum geboortegewig, groter as die gemiddelde, sal veroorsaak dat ons (H_0) ten gunste van (H_1) verwerp wanneer 'n 5%-betekenispeil gebruik word om die hipotese in 1.1 hierbo te toets? (4)

15 punte

VRAAG 2

Die volgende data is tydens eksperimentele toestande ingesamel om die effek van temperatuur ($x^\circ\text{C}$) op die pH (y) van sojamelk te bepaal.

Temperatuur $x^\circ\text{C}$	4	9	17	24	32	40	46	57	63	69	72	78
pH y	6,85	6,75	6,74	6,63	6,68	6,52	6,54	6,48	6,36	6,33	6,35	6,29

- 2.1 Verduidelik wat oor die verwantskap tussen x en y openbaar word deur die data waar te neem. (2)
- 2.2 (a) Gebruik jou sakrekenaar om die korrelasiekoëffisiënt r vir hierdie data te evalueer. (4)
- (b) Wat sê die waarde van r wat hierbo bepaal is vir ons oor die sterkte van 'n reguitlynverwantskap? (1)

- 2.3 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrate-regressielyn van y op x deur 'n toepaslike formule te gebruik.
Jy mag die volgende inligting gebruik:

$$\begin{aligned} \sum x &= 511; \quad \sum y = 78,52; \quad \sum x^2 = 28949; \quad \sum y^2 = 514,17; \quad \sum xy = 3291,88 \\ \bar{x} &= 42,58; \quad \bar{y} = 6,54 \end{aligned} \quad (10)$$

- 2.4 (a) Beraam die pH van sojamelk by 95°C . (3)
- (b) Dui aan hoe betroubaar hierdie beraming kan wees en gee 'n rede. (2)

22 punte

VRAAG 3

Mnr. I.E. Bean, die hoof van 'n plaaslike skool, het data versamel deur 'n waarnemingstudie wat op die 700 leerders in sy skool uitgevoer is.

- 3.1 Hy het bevind dat 498 leerders ten gunste van 'n verandering in die rooster is. Bepaal 'n benaderde 90%-vertrouensinterval vir die proporsie van leerders wat **nie** ten gunste van 'n verandering is nie. (10)
- 3.2 Hy het bevind dat die 95%-vertrouensinterval vir die tyd in minute wat elke leerder elke weksdag studeer $[105,89; 110,11]$ is.
 - (a) Bepaal die gemiddelde tyd in minute gestudeer per leerder. (2)
 - (b) Bepaal die standaardafwyking vir hierdie data. (6)
- 3.3 Hy het bevind dat 55% van sy leerders per bus skool toe kom. Indien hy 10 leerders ewekansig kies, bepaal die waarskynlikheid dat minstens twee van hulle per bus skool toe kom. (9)

27 punte

VRAAG 4

- 4.1 Marie en Eve is in 'n groep van 8 meisies. Op hoeveel verskillende maniere kan die 8 meisies op 'n bank sit indien Marie en Eve nie langs mekaar moet sit nie? (3)
- 4.2 Indien gegee word dat $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$ en $P(A \cap B) = 0,1$
 - (a) bepaal $P(A | B)$ (1)
 - (b) bepaal $P(A' | B)$ (1)
 - (c) toon wiskundig of die gebeurtenisse A en B onafhanklik is of nie. (3)
- 4.3 'n Steekproef van 3 tellers word ewekansig getrek uit 'n sak wat 8 rooi en 4 swart tellers bevat, sonder terugplasing. Laat die stogastiese/ ewekansige veranderlike X = aantal swart tellers getrek.
 - (a) Skryf die waarskynlikheidsmassafunksie neer. (6)
 - (b) Bepaal vervolgens, of andersins, die waarskynlikheid dat twee swart tellers getrek sal word. (5)
- 4.4 'n Waarskynlikheidsdigtheidfunksie vir X , die vertraging in ure, vir 'n vlug van Kaapstad word gegee deur:

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 - 0,02x & ; \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 10$$
 - (a) Bepaal die waarskynlikheid dat die vertraging tussen 2 en 6 uur sal wees. (8)
 - (b) Bepaal die mediaan van hierdie verdeling. (9)

36 punte

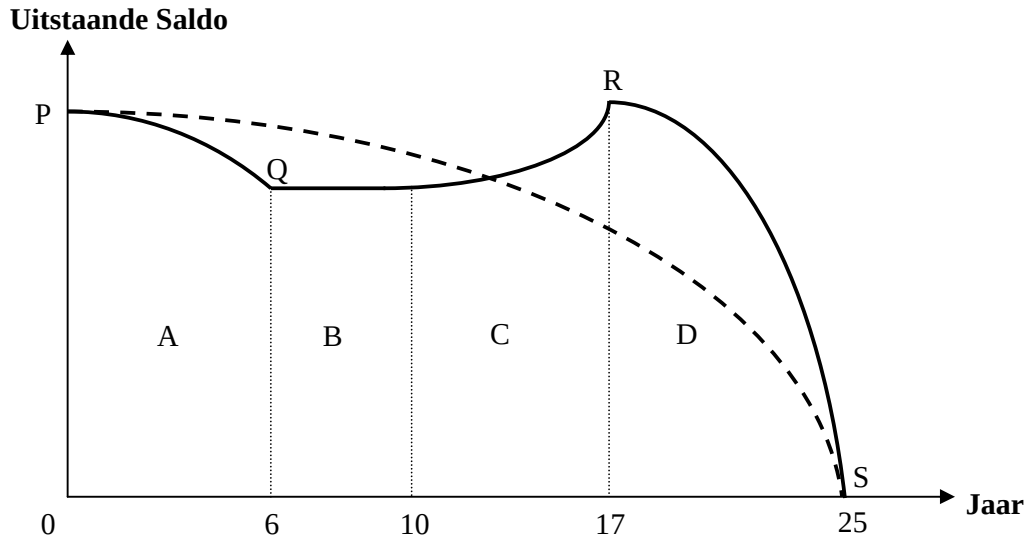
Totaal vir Module 2: 100

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

- 1.1 'n Voertuig wat vir P rand gekoop is, depresieer volgens 'n verminderende saldo teen 20% per jaar vir die eerste vyf jaar en 40% per jaar vir die volgende twee jaar. Wat is die gemiddelde jaarlikse depresiasiekoers oor die sewe jaar? (6)

1.2



Sanjay verkry 'n lening, P, met die bedoeling om dit met maandelikse paaieimente oor 'n tydperk van 25 jaar terug te betaal. Die kontinue kromme PQRS verteenwoordig Sanjay se Uitstaande Saldo oor die tydperk van 25 jaar. Die ideale kromme vir die Uitstaande Saldo word gegee as die stippellyn PS.

Interpreteer die vorm van die kromme met verwysing na die tydperke gemerk A, B, C en D en stel moontlike redes voor waarom Sanjay se kromme vir die Uitstaande Saldo nie die aanbevole pad gevolg het nie. (8)

14 punte

VRAAG 2

Philippa wen R6 000 000 in die lotery. Sy besluit om die geld te belê, op te hou werk en te reis. **Na vier maande begin** sy om R55 000 per maand uit haar wengeld te onttrek. Die rentekoers op die belegging is $9\frac{1}{2}\%$ per jaar, rente maandeliks saamgestel.

- 2.1 Bereken vir hoeveel jaar Philippa se belegging haar sal onderhou. (10)

Twee jaar nadat sy die lotery gewen het, besluit Philippa om terug te keer werk toe en dit wat van haar belegging oor is aan 'n meenthuis te bestee.

- 2.2 Bereken die waarde van die meenthuis wat Philippa sal kan bekostig. (12)

22 punte

VRAAG 3

Bongiwe doen **drie** maandelikse deposito's van R25 000 aan die begin van elke maand vir drie maande wat **onmiddellik begin**. Sy los dan haar geld in die bank sonder om enige verdere deposito's te doen.

Drie maande nadat Bongiwe haar eerste betaling gedoen het, begin Dudu met 'n maandelikse annuïteit.

Die rentekoers op albei rekeninge is 16% per jaar, maandeliks saamgestel.

- 3.1 Bereken die waarde van Bongiwe se belegging oor 5 jaar van nou af. (8)

- 3.2 Bepaal die grootte van Dudu se maandelikse betaling sodat albei beleggings oor 5 jaar van nou af dieselfde bedrag werd sal wees. (9)

17 punte

VRAAG 4

- 4.1 'n Rekursiewe formule $T_{k+1} = q \cdot T_k - 3T_{k-1}$ produseer die ry wat begin:

$p,$ 6, 30, 132, ...

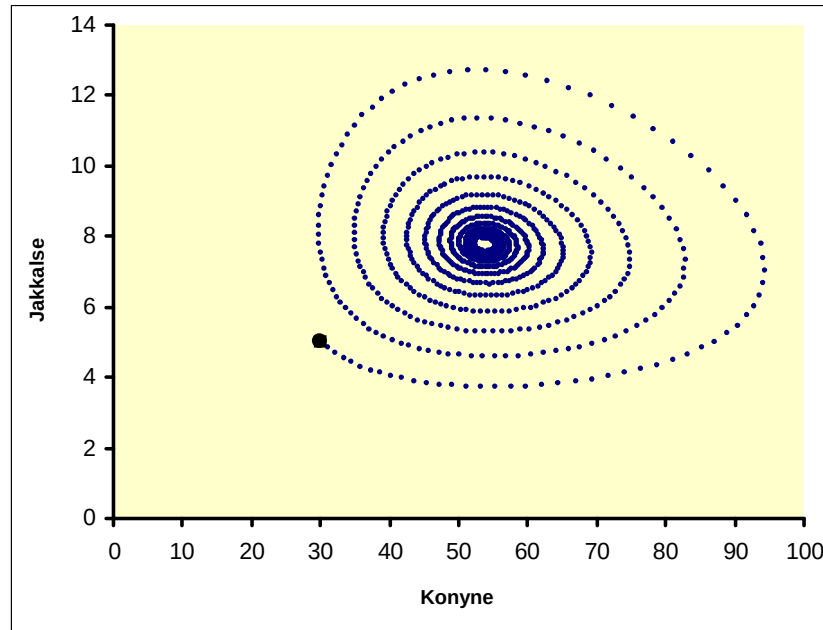
- Bepaal die waardes van p en q . (8)

- 4.2 Frikkie begin met 'n belegging van R100. Elke maand verhoog hy sy deposito met 10% van die vorige maand se deposito. Die rente op sy belegging is 14% per jaar, maandeliks saamgestel. Skryf 'n rekursiewe reël vir die belegging neer. (7)

15 punte

VRAAG 5

Die roofdier-prooi-model beskryf die gedrag van byvoorbeeld jakkalse en konyne in 'n geslote omgewing. Die grafiek van die toename/afname van 'n paar konyne en jakkalse in 'n bepaalde omgewing word hieronder gegee.



- 5.1 (a) Beraam die aanvanklike aantal jakkalse en konyne. (2)
- (b) Stel die grafiek voor dat enigeen van die diere uiteindelik uitgewis sal word? Verduidelik wat oor 'n lang tydperk gebeur. (4)
- (c) Beraam die uiteindelijke aantal jakkalse en konyne, d.w.s. die **ewewigspunt**. (2)
- (d) Gee die definisiegebied en waardegebied waarvoor die konynebevolking toeneem en die jakkalse afneem. (4)

5.2 Die formules wat die aantal konyne en jakkalse reël, word gegee as:

$$R_{n+1} = R_n + a.R_n \cdot \left(1 - \frac{R_n}{K}\right) - b.R_n.F_n \quad \text{en} \quad F_{n+1} = F_n + f.b.R_n.F_n - c.F_n$$

- (a) Verduidelik die aanwesigheid van die term $b.R_n.F_n$ en interpreteer die waarde K . (3)
- (b) Bereken die ewewigspunt vir bogenoemde model indien die volgende parameters gegee word:

$$a = 0,64 \quad b = 0,008 \quad c = 0,048 \quad K = 400 \quad f = 0,12$$

(8)

23 punte

VRAAG 6

Shaun is nie die netjiesste student in die koshuis nie en 'n kolonie miere het besluit om op die bestendige voorraad krummels op sy vloer toe te slaan. Synde meer skerpsinnig as higiënies, voorspel Shaun dat die kolonie nie onbepaald in getal kan toeneem nie, aangesien daar net 'n beperkte voorraad krummels is. Derhalwe sal die aantal miere na 'n leefbare limiet neig.

6.1 Is die toename van miere 'n Malthusiaanse of 'n Logistiese Model? Gee 'n rede. (2)

6.2 Veronderstel dat die groeimodel gegee word deur:

$$P_{n+1} = P_n + rP_n \left(1 - \frac{P_n}{2500}\right) \text{ waar } n \text{ in dae is}$$

en met $P_0 = 250$ en $P_1 = 375$.

(a) Wat is die limiet van die aantal miere? (2)

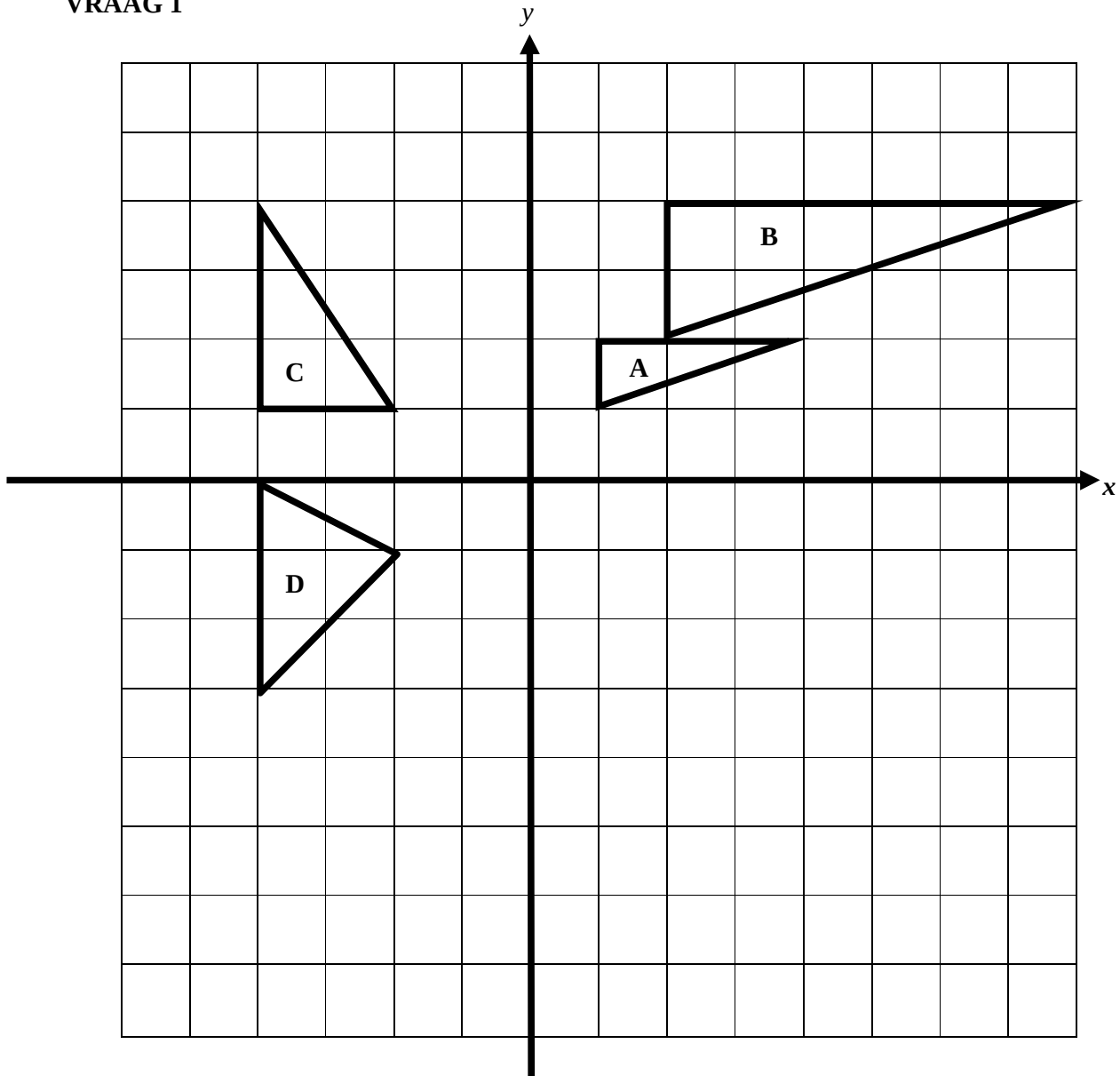
(b) Bepaal die waarde van r . (5)

9 punte

Totaal vir Module 3: 100

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1



- 1.1 Skryf deur die transformasie te beskryf die matriks neer wat:
- (a) vorm A op vorm B afbeeld. (4)
 - (b) vorm C op vorm D afbeeld. (5)
- 1.2 (a) Beskryf twee transformasies wat, wanneer hulle gekombineer word, vorm C op vorm B sal afbeeld. (5)
- (b) Bepaal die enkele transformasiematriks wat C op B afbeeld. (6)
- 1.3 Bepaal die beeld van die punt (10; 6) onder 'n rotasie van 60° antikloksgewys. Laat jou antwoord in wortelvorm. (6)

26 punte

VRAAG 2

2.1 Bepaal die inverse van die matriks

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(10)

2.2 Los deur die antwoord in 2.1 te gebruik, of andersins, die volgende stel vergelykings op:

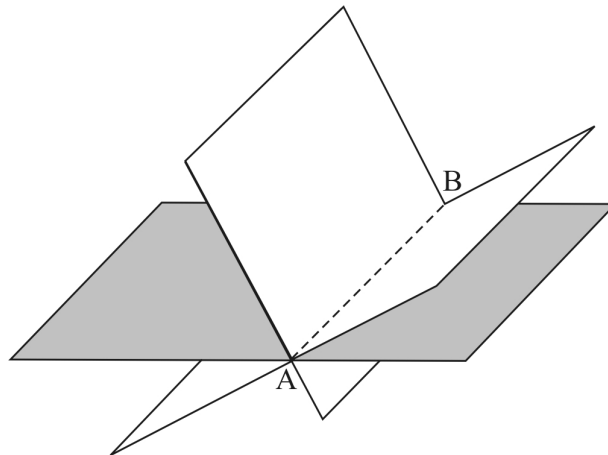
$$4x + 2y - z = 3$$

$$2x - 3y = 4$$

$$2y - 3z = 7$$

(6)

16 punte

VRAAG 3

Drie nie-parallelle vlakke wat langs 'n gemeenskaplike lyn AB sny, word getoon.

Bepaal watter stel(le) vergelykings die situasie wat in die diagram geïllustreer word, kan voorstel.

Let wel: Dit is nie nodig om elke stel vergelykings op te los nie.

	$2x + 4y - z = 2$	$2x + 4y - z = 5$
(1)	$4x + 8y - 2z = 6$	(2) $4x + 7y - 2z = 9$
	$x - 3y + z = 10$	$x - 3y + z = -1$

	$5x + 4y - z = 5$
(3)	$4x + 7y - 2z = 9$
	$x - 3y + z = -1$

Regverdig jou antwoord duidelik.

10 punte

VRAAG 4

'n *Enkelvoudige* grafiek is een waarin enige twee nodusse direk deur hoogstens een boog verbind word en geen nodus is direk met homself verbind nie.

'n *Samehangende* grafiek is een waarin elke nodus direk of indirek met elke ander nodus verbind word.

'n *Enkelvoudig samehangende* grafiek is een wat beide enkelvoudig en samehangend is.

'n Enkelvoudig samehangende grafiek word geteken met 6 nodusse en 9 skakels.

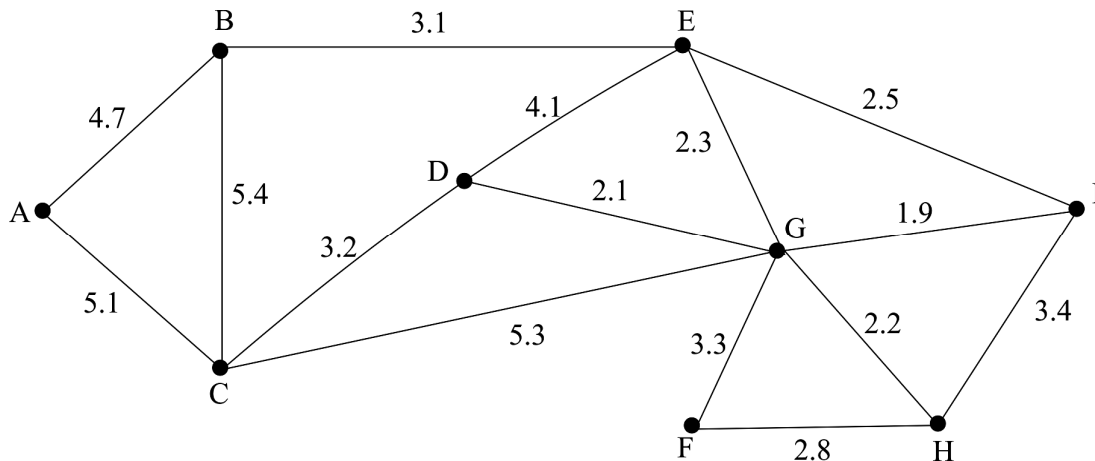
4.1 Wat is die som van die ordes van die nodusse? (2)

4.2 Verduidelik waarom die grafiek nie enige nodusse van orde 1 kan hê indien dit twee nodusse van orde 5 het nie. (3)

4.3 Teken 'n voorbeeld van 'n enkelvoudig samehangende grafiek met 6 nodusse en 9 skakels waarin een van die nodusse orde 5 het en al die ordes van die nodusse onewe getalle is. (5)

10 punte

VRAAG 5



Die netwerk hierbo toon die 'belangrike' grondpaaie wat deur 'n plaaslike raad in die Karoo gegradeer moet word. Die getal langs elke skakel is die lengte van die pad in kilometer.

- 5.1 Noem die nodusse wat 'n onewe orde het. (2)
- 5.2 Bepaal deur by A te begin en te eindig 'n roete van minimum lengte wat elke pad minstens een keer dek. Jy moet duidelik aandui watter paaie, as daar is, twee keer afgelê sal word. (14)
- 5.3 Gee die totale lengte van jou kortste roete. (4)
- 5.4 Daar is 'n 6,4 km lange sekondêre pad (nie op die netwerk aangedui nie) tussen B en D. Besluit of dit sinvol is of nie om BD as deel van die hoofgraderingsroete in te sluit. Gee redes vir jou antwoord. (6)

26 punte

VRAAG 6

Die bestuur van 'n groot temapark vra jou hulp om vyf rekenaars, een rekenaar by die kantoor en een by elkeen van die vier ingange, in 'n netwerk te verbind. Dit is duur om rekenaarkabel te lê, daarom versoek hulle jou om die minimum totale kabellengte te bepaal wat nodig is om die rekenaars in 'n netwerk te verbind.

Die nodusmatriks toon die kortste afstand, in meter, tussen die verskillende plekke.

	Kantoor	Ingang 1	Ingang 2	Ingang 3	Ingang 4
Kantoor	–	1514	488	980	945
Ingang 1	1514	–	1724	2446	2125
Ingang 2	488	1724	–	884	587
Ingang 3	980	2446	884	–	523
Ingang 4	945	2125	587	523	–

- 6.1 Demonstreer deur by ingang 2 te begin die gebruik van Prim se algoritme en bepaal vervolgens 'n minimum spanboom. Jy moet jou metode volledig kommunikeer en aandui in watter volgorde jy die skakels van die netwerk gekies het. (10)
- 6.2 Bereken die minimum totale lengte van die kabel wat benodig word. (2)

12 punte

Totaal vir Module 4: 100

Totaal: 300 punte