



GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2010

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE

Tyd: 3 uur

300 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 17 bladsye, 'n Antwoordblad van 1 bladsy en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i – iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
2. Hierdie vraestel bestaan uit VIER modules:

MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA (200 punte) is verpligtend.

Kies **EEN** van die **DRIE** opsionele modules:

MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF

MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF

MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte)

3. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
 4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
 5. Diagramme is nie volgens skaal geteken nie.
 6. Skryf al jou antwoorde in die antwoordboek wat voorsien word.
 7. Rond jou antwoorde tot twee desimale syfers af, tensy anders aangedui.
-

MODULE 1 CALCULUS EN ALGEBRA

VRAAG 1

Bewys deur van wiskundige induksie gebruik te maak dat

$$1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}, \text{ vir alle } n \in \mathbb{N} \quad (15)$$

[15]

VRAAG 2

Newton se verkoelingswet vir 'n vloeistof, in hierdie geval 'n koppie sop, word gegee deur die vergelyking:

$$T = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$$

waar

t die tyd in minute is

k 'n konstante vir die spesifieke vloeistof is

T die temperatuur in °C op enige gegewe tyd t is

T_0 die aanvanklike temperatuur in °C is (die waarde van T by $t = 0$)

T_s die omgewingstemperatuur in °C is

- 2.1 'n Koppie sop word in 10 minute van 90°C tot 60°C verkoel in 'n vertrek waar die temperatuur 20°C is. Toon aan, deur k op te los, en alle berekeninge te toon, dat

$$k = -\frac{1}{10} \ln \left(\frac{4}{7} \right). \quad (8)$$

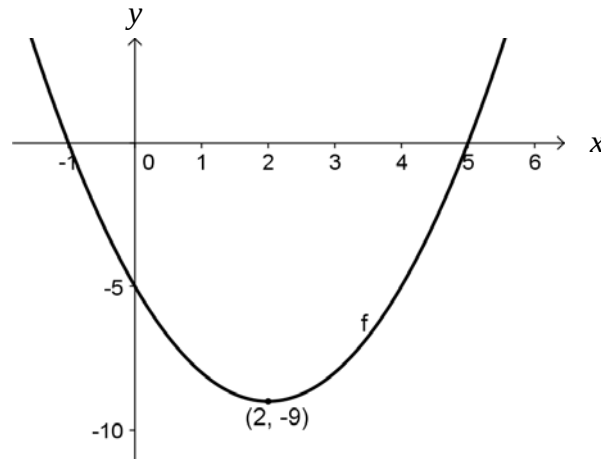
- 2.2 Bepaal die temperatuur van die sop na 15 minute (van die begin af). **Gee die antwoord korrek tot die naaste heelgetal.** (3)

- 2.3 Gee die vergelyking van die asimptoot van die grafiek van T . (2)

- 2.4 Verduidelik die betekenis van hierdie asimptoot in die werklike lewe. (2)
- [15]**

VRAAG 3

- 3.1 Bepaal al die reële oplossings vir die vergelyking $|x|^2 - 4|x| - 5 = 0$. Jy mag nie 'n sakrekenaar gebruik nie en moet al jou berekeninge toon. (8)
- 3.2 Die gegewe skets toon die grafiek van $y = f(x) = x^2 - 4x - 5$.



Deur die inligting op die skets te gebruik, teken op 'n **afsonderlike assestelsel**, met alle afsnitte op die asse en stasionêre punte getoon, die grafieke van:

(a) $y = |f(x)|$ (4)

(b) $y = f(|x|)$ (Jy mag jou antwoorde van 3.1 gebruik) (7)

[19]

VRAAG 4

Gegee: $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ met 'n nulpunt by $x = 1 + i$.

- 4.1 Bepaal die waardes van a en b . (7)
- 4.2 Gee die reële wortel van die vergelyking, $p(x) = 0$. (2)
- 4.3 Los vervolgens, of andersins, op vir x as $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$. (2)

[11]

VRAAG 5

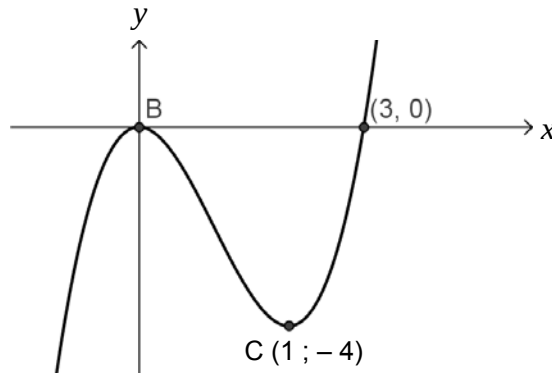
$$5.1 \quad g(x) = \begin{cases} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} & \text{as } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{as } x \geq -1 \end{cases}$$

Bepaal, met algebraïese motivering, of g kontinu is by die volgende punte en noem die tipe diskontinuiteit indien van toepassing:

(a) $x = 3$ (4)

(b) $x = -1$ (5)

5.2 Die volgende skets toon die grafiek van $y = f'(x)$. Hierdie grafiek sny die x -as by $(3; 0)$ en $B(0; 0)$, en dit het stasionêre punte by B en by $C(1; -4)$.



Die grafiek van f het twee stasionêre punte. Gee die x -waardes van hierdie punte **en** noem, met motivering, die aard van hierdie punte. (Onthou dat die skets $f'(x)$ voorstel.) (7)

[16]

VRAAG 6

6.1 As $f(x) = \frac{1}{1-2x}$, bepaal $f'(x)$ uit **eerste beginsels**. (8)

6.2 Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $y = \sin y \cdot \sin x$. (8)

6.3 As $y = \tan x$,

(a) bepaal y'' (5)

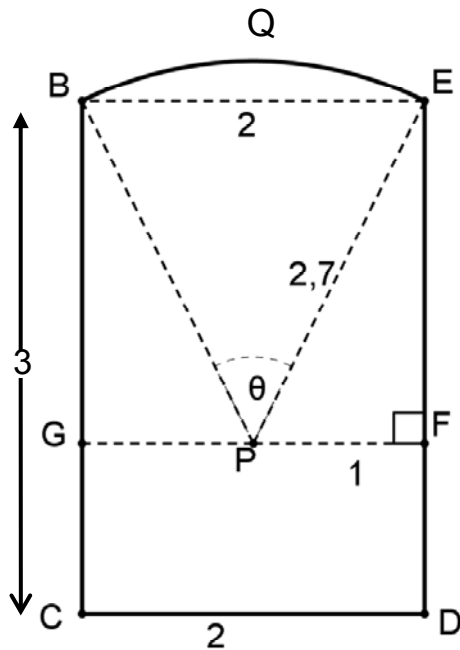
(b) bewys dat $y'' - 2y = 2y^3$ (5)

[26]

VRAAG 7

Pray More Kerk moet 'n venster in die vorm van 'n reghoek met 'n geboë bokant vervang. Hierdie bokant is 'n boog van 'n sirkel met middelpunt by P en radius $2,7$ m, soos in die diagram hieronder getoon. $BC = 3$ m, $CD = 2$ m. P is die middelpunt van FG .

(Die diagram is nie op skaal geteken nie.)



- 7.1 Bereken die waarde van θ in radiale. (Wenk: Gebruik die kosinusreël in $\triangle BPE$).
Gee die antwoord **korrek tot 3 desimale syfers**. (5)
- 7.2 Bereken die oppervlakte van die venster. (9)
[14]

VRAAG 8

- 8.1 Bepaal die volgende integrale:

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x}} dx$ (5)

(b) $\int x \sin x dx$ (5)

(c) $\int x \cdot \cos(x^2) dx$ (5)

- 8.2 Gebruik 'n **Riemann-som** om $\int_0^2 (x^2 + x) dx$ te bepaal. (13)
[28]

VRAAG 9

$f(x) = \frac{3(x-6)(x-1)}{(x-2)(x+1)}$. f het geen stasionêre punte nie, maar dit het 'n buigpunt by $x \approx 0,8$.

9.1 Bereken die benaderde y -waarde van die buigpunt. (2)

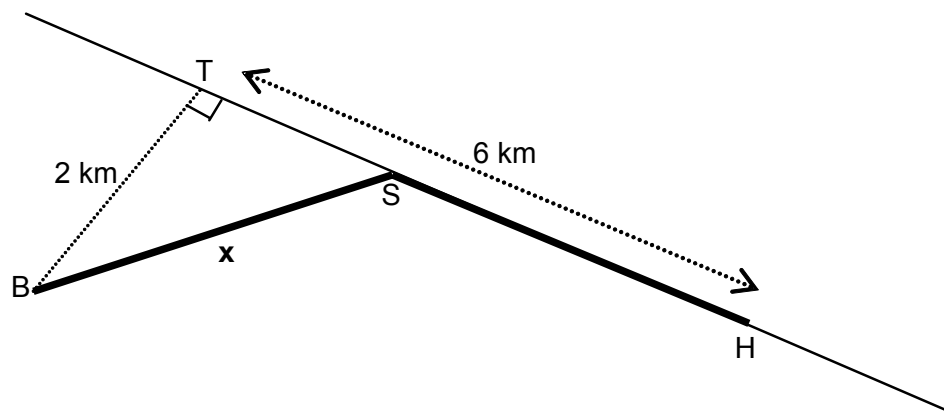
9.2 Skryf alle afsnitte met die asse en vergelykings van die horisontale en vertikale asimptote neer. (7)

9.3 Die grafiek van f sny die horisontale asimptoot by 'n punt. Bereken die x -waarde van hierdie punt. (5)

9.4 Teken vervolgens 'n sketsgrafiek van f en toon alle afsnitte, asimptote, die buigpunt sowel as die punt wat in 9.3 bereken is. (9)
[23]

VRAAG 10

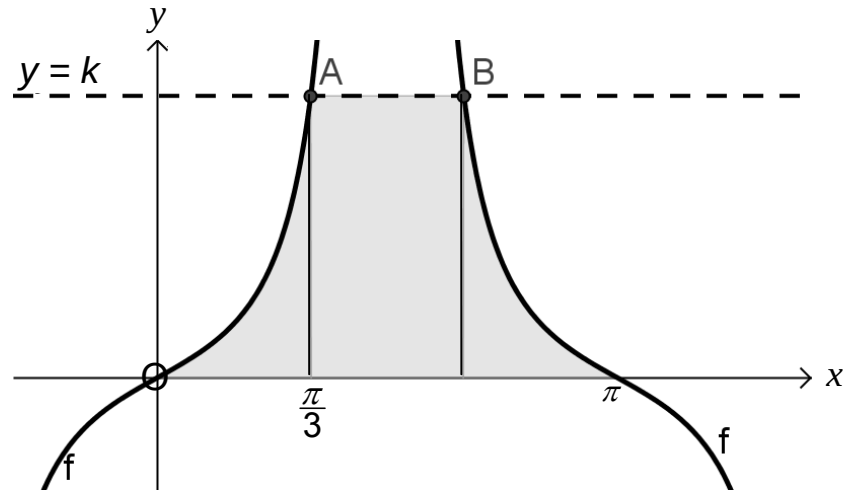
10.1 'n Man in 'n roeiboot by B is 2 km van die naaste punt op die strand, T, soos in die diagram hieronder geïllustreer. Hy wil sy huis, H, wat 6 km van T is, bereik. Hy sal tot by S roei en dan tot by H stap. Hy roei teen 3 km/h en stap teen 5 km/h. TSH is 'n reguitlyn.



(a) As $BS = x$ km toon dat die afstand wat hy moet stap gegee word deur $SH = 6 - \sqrt{x^2 - 4}$ km. (2)

(b) Bepaal die waarde van x sodat hy sy huis in die kortste moontlike tyd sal bereik. (Wenk: $\text{tyd} = \frac{\text{afstand}}{\text{spoed}}$) (10)

- 10.2 Die skets toon die grafiek van $f(x) = \tan x \cdot \sec x$, wat die x -as by 0 en by π sny, en die lyn $y = k$, wat f by $A\left(\frac{\pi}{3}; k\right)$ en by B sny.



- (a) Bepaal die koördinate van A en B. Gee die antwoord in wortelvorm waar nodig. (4)
- (b) Skryf 'n uitdrukking neer wat gebruik kan word om die oppervlakte van die gearseerde gebied, d.w.s. die gebied tussen f , die lyn $y = k$ en die x -as, te verkry. (4)
- (c) Bereken vervolgens die waarde van hierdie oppervlakte. (6)
- 10.3 Die grafiek van f roteer om die x -as. Die volume van die omwentelingsliggaam wat tussen $x = 0$ en $x = a$ gevorm word, is gelyk aan $\frac{\pi}{3}$. Bepaal die waarde van a . (7)
- (Jy mag aanvaar dat $0 < a < \frac{\pi}{3}$.)

[33]

Totaal vir Module 1: 200 punte

MODULE 2 STATISTIEK

Hierdie afdeling bestaan uit 5 vrae. Alle antwoorde moet tot vier desimale plekke afgerond word.

VRAAG 1

Rekords van 'n skakelbord by 'n oproepsentrum het getoon dat die tyd wat dit in 2008 geneem het vir oproepe om beantwoord te word, normaal verdeel is met 'n gemiddelde van 27 sekondes en 'n standaardafwyking van 2,5 sekondes.

- 1.1 Bereken 'n interval waarin 90% van alle oproepe in 2008 beantwoord is. (3)

In 2009 is 'n ewekansige steekproef van 20 oproepe geneem en die tyd wat dit geneem het vir elke oproep om beantwoord te word, word hieronder opgeteken:

21	26	29	18	35	22	25	29	27	28
30	29	25	26	27	19	24	30	32	21

- 1.2 Bereken die 95%-vertrouensinterval vir die gemiddelde tyd wat dit in 2009 geneem het vir 'n oproep om beantwoord te word. (8)

- 1.3 Op grond van hierdie data beweer die bestuurder van die oproepsentrum dat die tyd wat dit geneem het vir 'n oproep om beantwoord te word, in 2009 verminder is. Stel hierdie bewering duidelik as 'n hipotese en bepaal of daar by die 5%-betroubaarheidsvlak 'n vermindering was in die tyd wat dit geneem het vir 'n oproep om beantwoord te word. (10)
[21]

VRAAG 2

- 2.1 As die letters van die woord PROBABILITY op ewekansige wyse in 'n ry gerangskik word, bepaal die waarskynlikheid dat die twee I's geskei sal wees. (6)

- 2.2 As 'n hoeklyn van 'n veelhoek gedefinieer word as 'n lyn wat enige twee nie-aangrensende hoekpunte verbind, hoeveel hoeklyne is daar in 'n vyftienkantige veelhoek? (4)
[10]

VRAAG 3

'n Leerder verloor sy oorspronklike tweeveranderlike datastel, maar vind die volgende op 'n stuk papier aangeteken:

- $\sum x_i = 124$
- $\bar{x} = 10\frac{1}{3}$
- $\sum x_i^2 = 1578$
- $\sum y_i = 124$
- $\sum x_i y_i = 1045$
- $\sum y_i^2 = 1568$

3.1 Toon aan dat daar 12 datapunte in die datastel is. (2)

3.2 Bepaal $\bar{y}$. (2)

3.3 Toon aan dat die kleinste kwadrate-regressielyn van y in x in die vorm $y = a + bx$ $y = 18,5649 - 0,7966x$ is. (8)

3.4 Gebruik hierdie regressielyn om die y -waarde te beraam as $x = 9$. (2)

3.5 Bereken die korrelasiekoëffisiënt deur $r = b \times \frac{S_x}{S_y} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ te gebruik.

Gegee: $S_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ en $S_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2$ en $S_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$ (4)

3.6 Beskryf die korrelasie tussen die veranderlikes. (2)

[20]

VRAAG 4

- 4.1 Die waarskynlikheidsmassafunksie van die diskrete stogastiese veranderlike X word gegee deur $P(X = x) = a\left(\frac{2}{3}\right)^x$ vir alle $x \in \mathbb{N}_0$.
- (a) Bepaal $P(x \leq 1)$ in terme van a . (3)
- (b) Bepaal die waarde van die konstante a . (5)
- 4.2 In die veronderstelling dat 'n paartjie 'n ewe groot kans het om 'n seun of 'n dogter te hê, bepaal die waarskynlikheid dat daar in 'n gesin van sewe kinders minstens 3 dogters sal wees. (10)
- 4.3 In 'n groep van 50 rekenaars het 20 'n virus. As 5 rekenaars ewekansig gekies word, wat is die waarskynlikheid dat twee van hulle 'n virus het? (8)
- 4.4 'n Sak bevat 'n baie groot getal groen en blou albasters in die verhouding 1:2. Hoeveel albasters moet ewekansig gekies word sodat die waarskynlikheid dat daar minstens een albaster groen is, groter as 0,975 is? (10)
- [36]**

VRAAG 5

Die twee gebeurtenisse A en B is sodanig dat $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ en $P(A|B) = 0,1$.

- 5.1 Bewys dat die waarskynlikheid dat albei gebeurtenisse sal plaasvind 0,03 is. (2)
- 5.2 Bereken die waarskynlikheid dat:
- (a) minstens een van die gebeurtenisse sal plaasvind. (2)
- (b) presies een van die gebeurtenisse sal plaasvind. (4)
- (c) B sal plaasvind indien A plaasgevind het. (2)
- 5.3 Is gebeurtenisse A en B onafhanklik? Motiveer jou antwoord deur van berekeninge gebruik te maak. (3)
- [13]**

Totaal vir Module 2: 100 punte

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING**Hierdie afdeling bestaan uit 5 vrae.****VRAAG 1**

'n Deel van die sigblad wat gebruik is om terme in 'n tweededordeverskil-vergelyking te bereken, word hieronder getoon. Die formule vir die berekening van opeenvolgende terme word gegee as $T_n = aT_{n-1} + bT_{n-2}$.

T_2	100,00
T_3	1125,50
T_4	1233,63
T_5	2393,43

1.1 Bepaal die waardes van a en b (korrek tot drie desimale plekke). (7)

1.2 Bepaal vervolgens T_1 . (3)
[10]

VRAAG 2

2.1 Xolani het 'n woonstel vir R485 000 gekoop. Hy het 'n deposito van 10% betaal en toe 'n lening vir die res van die koste verkry oor 'n tydperk van 20 jaar. Aanvanklik was die rente 11% per jaar, maandeliks saamgestel.

(a) Bereken sy maandelikse paalement. (7)

Na presies 3 jaar het die bank die rentekoers tot 13% per jaar verhoog, maandeliks saamgestel.

(b) Bereken sy nuwe maandelikse terugbetalings. (12)

2.2 Sam spaar vir haar aftrede deur 'n aftree-annuïteit te gebruik. Sy wil vir die res van haar lewe R20 000 per maand kan onttrek, vanaf die maand onmiddellik na haar aftreedatum wat haar 65^{ste} verjaardag sal wees. Sy wil slegs van die rente van haar belegging leef, sodat haar dogter die kapitaal kan erf. Die rente wat sy na haar 65^{ste} verjaardag op haar lewende-annuïteit sal verdien, is 12% per jaar, maandeliks saamgestel.

(a) Verduidelik waarom sy R2 000 000 in haar annuïteit moet hê teen die tyd dat sy aftree. Motiveer jou verduideliking met toepaslike berekeninge. (4)

(b) Sy doen haar eerste betaling in haar aftree-annuïteit op haar 37^{ste} verjaardag en haar laaste betaling op haar 65^{ste} verjaardag. Die aftree-annuïteit verdien 9,8% per jaar, maandeliks saamgestel. Bepaal die nodige maandelikse bydrae tot haar aftree-annuïteit. (8)

[31]

VRAAG 3

Kate belê R250 elke maand, op die eerste dag van die maand, in 'n spaarrekening wat 7,5% per jaar, maandeliks saamgestel, verdien. Elke jaar verhoog sy haar maandelikse paaieiment met 10%.

3.1 As haar eerste betaling op 1 Januarie 2010 is, hoeveel sal sy in haar rekening hê op 31 Desember 2012? (10)

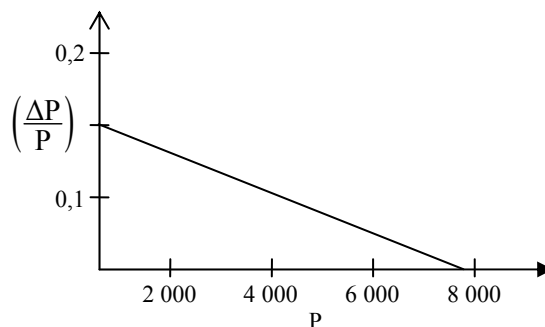
3.2 Ongelukkig kon sy van Junie tot Oktober, beide ingesluit, nie betalings in 2010 doen nie. Bereken hoeveel minder haar rekeningsaldo op 31 Desember 2012 sal wees. (8)
[18]

VRAAG 4

In 1898, toe die Nasionale Krugerwildtuin as 'n Wildreservaat geproklameer is, is die olifantbevolking (P) tot naby uitwissing gejag. In 1905 is tien olifante in die park aangeteken, maar sedertdien het bewaringspogings die toename van die olifantbevolking verseker. Van die laat 1960's tot die 1990's is uitdunbedrywighede gebruik om die olifantbevolking te beheer, omdat die parkbestuurders besluit het dat 7 500 olifante die dra vermoë van die park is. Die natuurlike jaarlikse groeikoers van 'n olifantbevolking is 0,15. Gebruik 'n logistiese model om die volgende vrae te beantwoord.

4.1 Beraam hoeveel olifante daar in 1920 in die park was. (8)

4.2 Hieronder is 'n grafiek wat die verwantskap tussen die groeikoers $\left(\frac{\Delta P}{P}\right)$ en die bevolking (P) toon.



Gee die presiese waardes van die x - en die y -afsnit en dui aan wat hulle voorstel. (5)

4.3 Bepaal die vergelyking van die lineêre verwantskap van Vraag 4.2. (4)

4.4 Bereken:

(a) die groeikoers toe die bevolking 3 000 was. (3)

(b) die bevolking as die groeikoers 0,05 is. (3)
[23]

VRAAG 5

In die Noordpoolgebied is die lemming (L_n) die vernaamste prooi van die wesel (S_n). 'n Roofdier-Prooi-model is gebruik om die wisselwerking tussen hierdie twee spesies op 'n eiland te modelleer. Die tydperk tussen herhalings is 1 jaar. Die vergelykings wat gebruik is om die bevolkingswisselwerking te modelleer is:

$$L_{n+1} = L_n + 0,8L_n \left(1 - \frac{L_n}{10\,000}\right) - 0,02L_n \cdot S_n$$

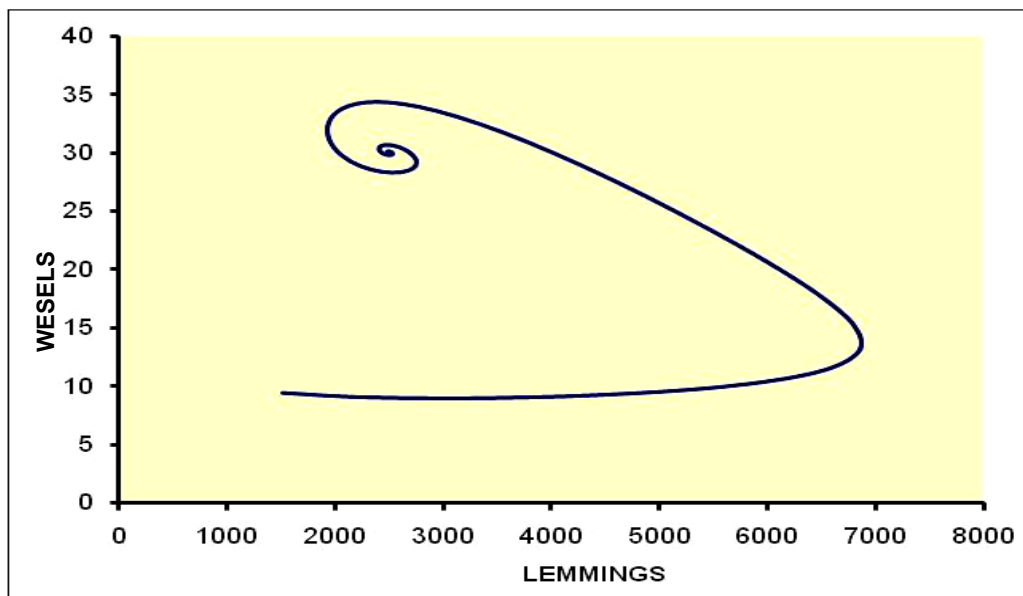
$$S_{n+1} = S_n + 0,00004L_n \cdot S_n - 0,1S_n$$

5.1 Wat is die gemiddelde leeftyd van 'n wesel? (3)

5.2 Wat is die natuurlike groeikoers van die lemmingbevolking? (1)

5.3 Wat is die lemming-dra vermoë op die eiland? (1)

Die grafiek hieronder toon die bevolkings van die lemmings en wesels.



5.4 Gebruik die grafiek om die aanvanklike bevolking van albei spesies te skat. (2)

5.5 Dui op die grafiek aan waar die lemmingbevolking afneem en die weselbevolking toeneem. (Gebruik die grafiek wat op die Antwoordblad voorsien is.) (2)

5.6 As die vergelyking vir die weselbevolking verander word tot

$$S_{n+1} = S_n + 0,00006L_n \cdot S_n - 0,1S_n$$

bepaal die nuwe stabiele punt van die twee bevolkings. (9)

[18]

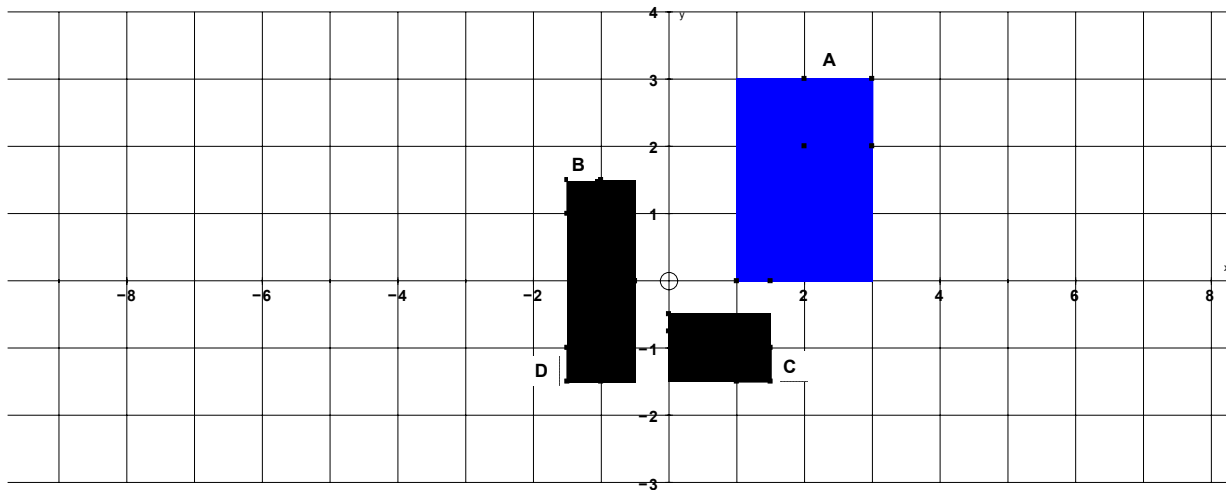
Totaal vir Module 3: 100 punte

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

Hierdie afdeling bestaan uit 7 vrae.

VRAAG 1

Hieronder is 'n diagram wat vier gelykvormige vorms A, B, C en D voorstel.



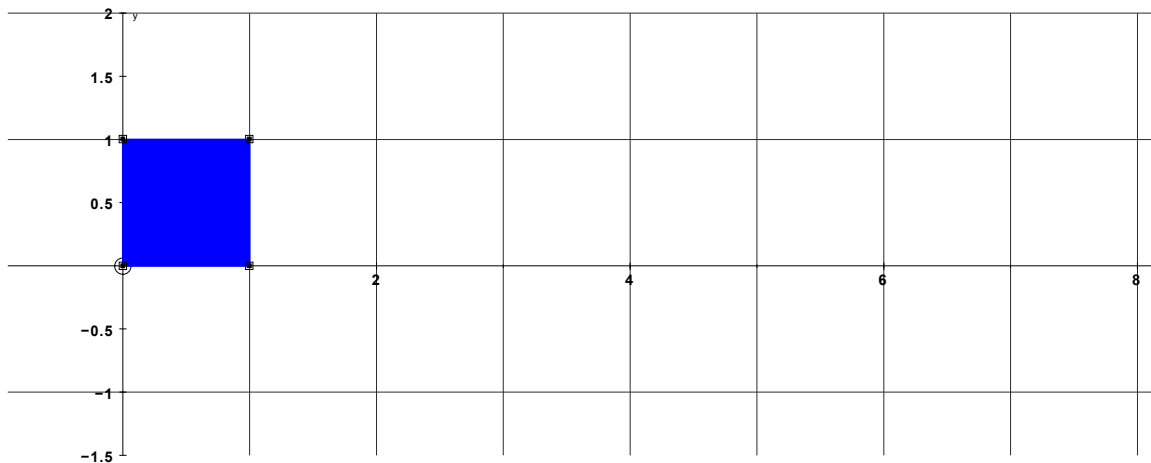
$$\text{Mat P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{Mat Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Mat R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Mat S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gebruik matrikse P, Q, R en S om die matriksproduk te gee wat elkeen van die volgende transformasies voortbring. Jy mag jou antwoorde neerskryf deur die letters P, Q, R en S te gebruik.

- 1.1 Vorm A na vorm B. (4)
- 1.2 Vorm B na vorm C. (2)
- 1.3 Vorm A na vorm D. (4)

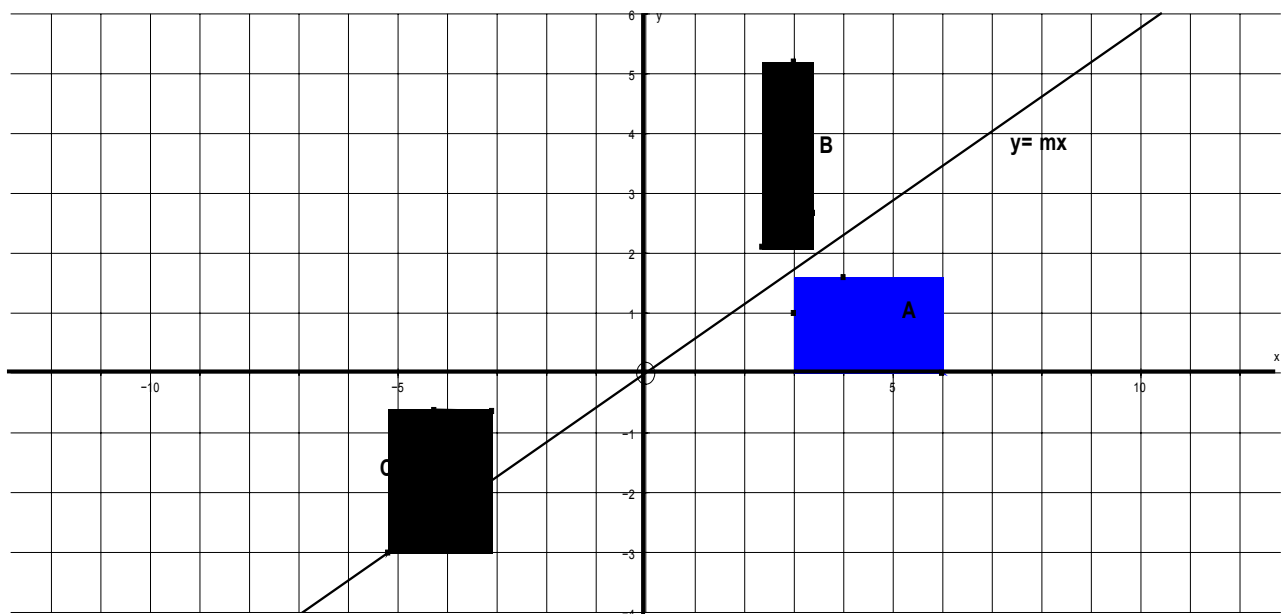
[10]

VRAAG 2



- 2.1 Teken op die assestelsel wat voorsien is op die Antwoordblad, die vierkant hierbo nadat dit met 'n faktor van 3 geskuif is en toe met 'n faktor van 2 vergroot is met beide transformasies parallel aan die x -as en met die y -as as die invariante lyn. (6)
- 2.2 Sal die resulterende vorm dieselfde wees as die volgorde van die transformasies in Vraag 2.1 omgekeer word? (2)
- [8]**

VRAAG 3



In die diagram hierbo is driehoek B 'n refleksie van driehoek A in die lyn $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Bepaal:

- 3.1 die inklinasie van die reguitlyn. (2)
- 3.2 die matriks wat A op B afbeeld. (3)
- 3.3 die matriks wat B op C afbeeld. (5)

[10]

VRAAG 4

Drie vergelykings word gegee:

$$x + 2y - z = 8$$

$$-x + y + bz = -5$$

$$2x + 3y + z = 11$$

4.1 Bepaal 'n waarde vir b sodat daar geen unieke oplossing vir die stelsel gelyktydige vergelykings is nie. (6)

4.2 As die stelsel vergelykings hierbo voorgestel word as die matriksvergelyking $AX = Y$ en $b = 4$:

(a) Bepaal A^{-1} . (10)

(b) Los vervolgens, of andersins, die stelsel gelyktydige vergelykings op. (4)
[20]

VRAAG 5

Die matriks hieronder gee die afstand (in meter) tussen elkeen van die ses sekuriteits-kameras in een van die 2010-Wêreldbekerstadions.

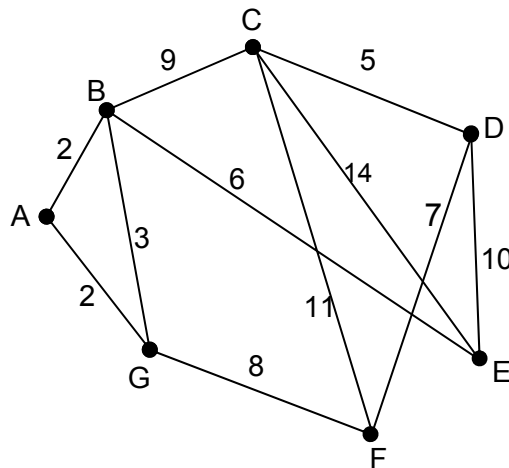
	A	B	C	D	E	F
A		60	100	110	80	70
B	60		70	80	90	85
C	100	70		50	65	105
D	110	80	50		60	40
E	80	90	65	60		40
F	70	85	105	40	40	

5.1 'n Minimum verbindingsnetwerk van kables moet tussen die kameras gelê word. Begin by D en gebruik Prim se algoritme om 'n minimum verbindingsnetwerk te konstrueer. (8)

5.2 Die sekuriteitspan moet elkeen van die kameras op 'n uurlikse basis nagaan. Bepaal 'n bogrens vir die kortste roete wat hulle kan aflê as die sekuriteitskantoor by A is. (8)
[16]

VRAAG 6

Hieronder is 'n grafiek wat die afstand van teerpaaie tussen verskillende plase voorstel.



- 6.1 Die padinstandhoudingsafdeling moet elke pad nagaan vir slaggate. Met watter paaie sal hulle twee keer moet ry om 'n Euler-baan van minimum lengte te vind? (8)
 - 6.2 Daar is 'n grondpad tussen GD wat 7 km lank is. As die padinstandhoudingsafdeling hierdie pad as deel van die Euler-baan gebruik, bepaal hoeveel langer of korter as die baan in Vraag 6.1 hul nuwe baan sal wees. (10)
 - 6.3 Die padinstandhoudingsafdeling kan die pad by D begin nagaan en by E klaarmaak, maar moet steeds minstens een keer met elke pad ry. Wat sal die totale afstand wees wat hulle moet ry? (6)
- [24]**

VRAAG 7

Hoeveel nie-isomorfe Euler-bane kan op 6 nodusse geteken word? Die grafieke moet eenvoudig en verbind wees.

Toon al jou berekeninge om jou antwoord te motiveer.

[12]

Totaal vir Module 4: 100 punte

Totaal: 300 punte