

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE

Tyd: 3 uur

300 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 20 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i – iv). 'n Antwoordblad word ook voorsien vir die beantwoording van Vrae 2.3 (a) en 4.1 (a) in Module 1 en moet saam met jou antwoordboek ingehandig word. Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.

2. Hierdie vraestel bestaan uit VIER modules:

MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA (200 punte) is verpligtend.

Kies **EEN** van die **DRIE** Opsionele Modules:

MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF
MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF
MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte)

3. Nie-programmeerbare en nie-grafiese sakrekenaars mag gebruik word.
 4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
 5. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
 6. Indien van toepassing moet berekeninge gedoen word deur radiale te gebruik en antwoorde moet in radiale gegee word.
 7. Rond jou antwoorde af soos aangedui in elke vraag.
-

MODULE 1 CALCULUS EN ALGEBRA**VRAAG 1**

Bewys deur induksie dat $9^n - 8n - 1$ deelbaar is deur 8 vir alle natuurlike waardes van n , met $n > 1$.

[14]**VRAAG 2**

2.1 Los op vir x sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

$$\log x = \log 2 + \log(x+5) - \log(x-1). \quad (6)$$

2.2 Gegee: $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

(a) Bepaal of $f(x)$ stygend of dalend is. (3)

(b) Wat is die waardeversameling van $f(x)$? (4)

(c) Bepaal 'n uitdrukking vir die inverse funksie $f^{-1}(x)$. (4)

2.3 Gegee: $f(x) = \begin{cases} x & \text{as } x \geq 1 \\ -x & \text{as } x < 1 \end{cases}$ en $g(x) = \ln x$

(a) Skets die grafiek van f op die Antwoordblad wat voorsien word. (4)

(b) Bepaal die definisieversameling van $g(f(x))$. (4)

[25]**VRAAG 3**

3.1 Dit word gegee dat $x = a + bi$ die vergelyking $(2+i)(x+3i) = 8i+6$ bevredig. Bepaal die waardes van a en b . (7)

3.2 Bepaal die waarde van k as $x^3 - 5x^2 + kx - 13 = 0$ en $x = 2 + 3i$ 'n wortel van die vergelyking is. (8)

[15]

VRAAG 4

4.1 Jamie speel met sy sakrekenaar en hy merk op dat $\sin\left|\frac{\pi}{4}\right| = \left|\sin\frac{\pi}{4}\right|$. Hy probeer dit met π , $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{4}{5}\pi$, en nou glo hy dat hy 'n nuwe trigonometriese identiteit ontdek het: $\sin|x| = |\sin x|$.

(a) Teken die grafieke $g(x) = \sin|x|$ en $h(x) = |\sin x|$ op die interval $0 \leq x \leq 2\pi$. Gebruik die Antwoordblad wat voorsien word. (8)

(b) Verduidelik Jamie se fout deur te dink dat $\sin|x|$ altyd gelyk is aan $|\sin x|$. (2)

4.2 Gegee: $f(x) = \begin{cases} px & \text{as } 0 < x < \pi \\ -2\cos x & \text{as } \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi}\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)^2 - 2 & \text{as } x > \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

(a) (i) Bepaal die waarde van p sodanig dat f kontinu is by $x = \pi$. (Jy hoef NIE eerste beginsels te gebruik nie.) (4)

(ii) Bepaal of f kontinu is by $x = \frac{3\pi}{2}$. (5)

(b) (i) Verduidelik óf deur middel van 'n skets óf algebraïes waarom f nie differensieerbaar kan wees by $x = \pi$ vir die waarde van p wat in Vraag 4.2 (a)(i) bepaal is nie. (5)

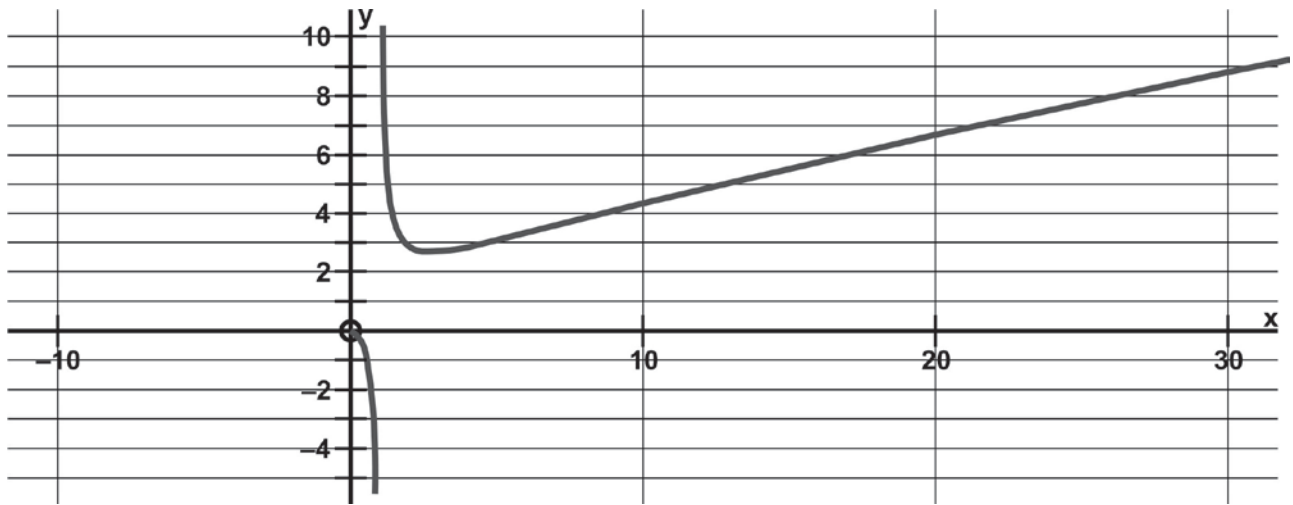
(ii) Bepaal $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} f'(x)$ en $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} f'(x)$. (6)

(iii) Is f differensieerbaar by $x = \frac{3\pi}{2}$? Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)

[32]

VRAAG 5

5.1 Hieronder is die grafiek van $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.



- Verduidelik waarom daar geen grafiek aan die linkerkant van die y-as is nie. (2)
- Gee die vergelyking van die vertikale asimptoot van die grafiek. (2)
- Indien gegee word dat $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, bepaal die koördinate van die draaipunt van die grafiek. (8)

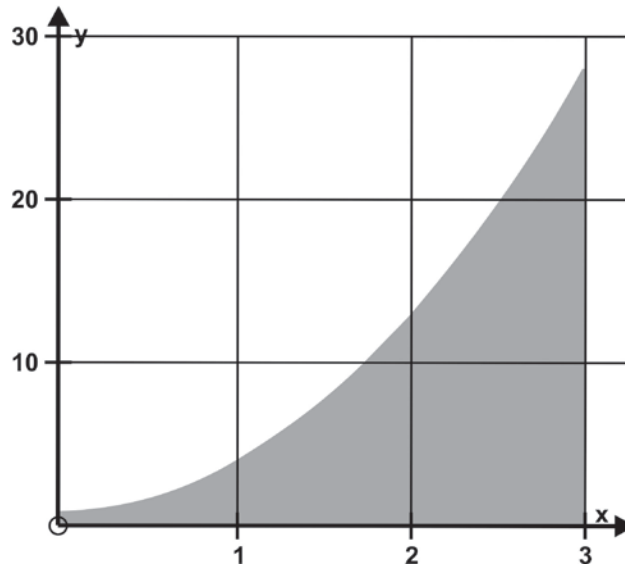
5.2 Die funksie $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{x + 1}$ word gegee.

- Bepaal die vergelyking van die skuins asimptoot van die grafiek van f . (6)
- Sny die skuins asimptoot die grafiek? Motiveer jou antwoord. (3)

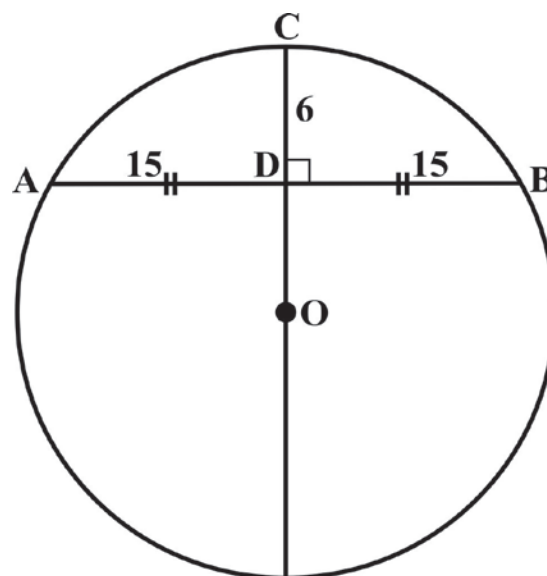
[21]

VRAAG 6

Gebruik 'n Riemann-som om die oppervlakte tussen die krommes $f(x) = 3x^2 + 1$ en die x -as op die interval $x \in [0; 3]$ te bepaal soos aangedui op die grafiek hieronder.

**[14]****VRAAG 7**

'n Sirkel word hieronder getoon. CD is loodreg op AB en wanneer CD verleng word, gaan dit deur die middelpunt O van die sirkel. D is die middelpunt van AB en die lengtes van CD en AB is onderskeidelik 6 cm en 30 cm.



- 7.1 Toon dat die radius van die sirkel 21,75 cm is. (6)
- 7.2 Bepaal die booglengte ACB, korrek tot 4 desimale plekke. (5)
- 7.3 Bereken die oppervlakte van die segment ACBD, korrek tot 4 desimale plekke. (5)

[16]

VRAAG 8

Die vergelyking $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$ definieer y as 'n funksie van x .

8.1 Verifieer dat $(2; -1)$ 'n punt op die kromme is. (2)

8.2 Bepaal $\frac{dy}{dx}$. (8)

8.3 Bepaal vervolgens die vergelyking van die raaklyn by $(2; -1)$. (5)
[15]

VRAAG 9

Bepaal die volgende integrale:

9.1 $\int 2x^3 - \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ (6)

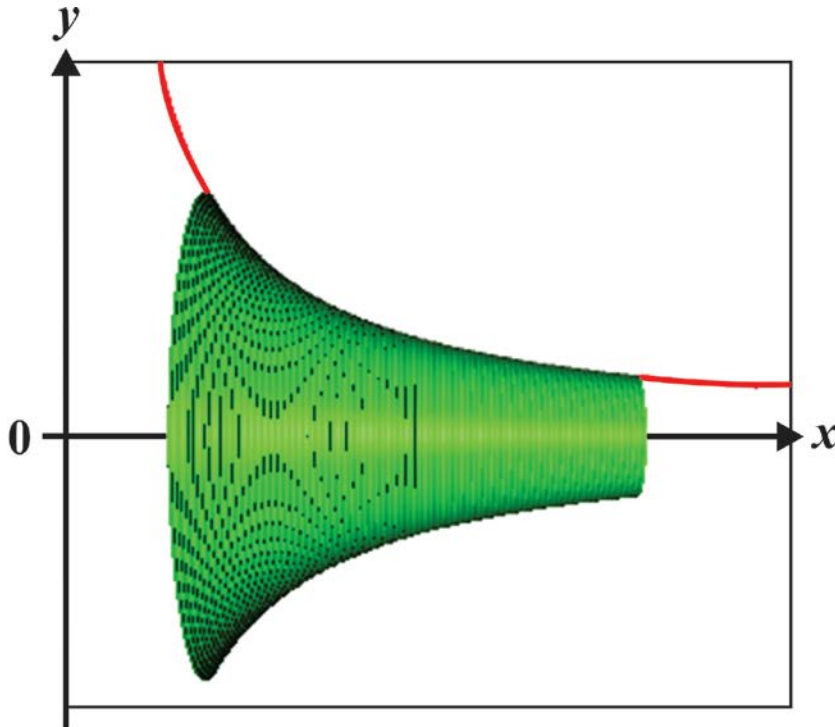
9.2 $\int (\cos^2 3x)(\sin 3x) dx$ (7)

9.3 $\int \cos 4\theta \cdot \sin 5\theta d\theta$ (6)

9.4 $\int y\sqrt{y+3} dy$ (9)
[28]

VRAAG 10

Hieronder is 'n prent van die grafiek $y = \frac{1}{x}$. Die oppervlakte begrens deur die kromme en die lyne $x = 1$ en $x = a$, waar $a > 1$, is om die x -as geroteer.



10.1 Bepaal die omwentelingsvolume in terme van a .

(8)

10.2 Bepaal vervolgens die omwentelingsvolume as $a \rightarrow \infty$.

(2)

[10]

VRAAG 11

'n Industriële skoorsteen lê besoedeling (roet) op die grond neer. As twee industriële skoorstene (A en B) 15 km uitmekaar is, word die konsentrasie roet op die lyn wat hulle verbind op 'n afstand x vanaf skoorsteen A, gegee deur: $S = \frac{8k}{x^2} + \frac{k}{(15-x)^2}$ waar k 'n positiewe konstante is.



[<<http://interactive.wxxi.org>>]

Bepaal die punt op die lyn wat die twee skoorstene verbind waar die konsentrasie roet 'n minimum is.

[10]

Totaal vir Module 1: 200 punte

MODULE 2 STATISTIEK

Alle antwoorde moet tot die vierde desimale plek afgerond word.

VRAAG 1

- 1.1 'n Fabriek maak **groot** hoeveelhede gekleurde lekkers en dit is bekend dat gemiddeld 20% van die lekkers groen is. 'n Pakkie bevat 20 lekkers ('n steekproef van die fabriek). Bereken die waarskynlikheid dat presies sewe van die lekkers groen is. (6)
- 1.2 'n Comrades-atleet besit ses **verskillende** pare hardloopskoene. Bereken die aantal maniere om die volgende te kies:
- (a) 4 skoene uit die 12 (1)
- (b) 2 linkerskoene en 2 regterskoene (3)
- (c) 2 paar skoene wat nie pas nie (Let wel: 'n paar is 'n linker- en regterskoen) (4)
- 1.3 Bepaal die aantal maniere waarop 9 mense in drie groepe van drie gerangskik kan word. (5)
- 1.4 In 'n bondel van 20 geïntegreerdekring-skyfies is 20% defektief. 'n Steekproef van 10 word ewekansig geneem. Wat is die waarskynlikheid dat minstens een van die skyfies defektief sal wees? (7)
- [26]**

VRAAG 2

Tellings in 'n IK-toets is normaal verdeel met 'n gemiddelde van 100 en 'n standaardafwyking van 15.

- 2.1 Daar word gesê dat om 'n superieure intelligensie te hê, jou IK-telling tussen 120 en 129 moet val. Watter persentasie van die wêreld se bevolking val in hierdie kategorie? (10)
- 2.2 2,2% van die bevolking val in die laagste kategorie. Watter IK-telling is die maksimum telling wat iemand in die laagste kategorie sal plaas? (6)
- [16]**

VRAAG 3

Tien leerders skryf eksamenvraestelle aan die einde van die termyn in GP-Engels en Frans. Hul punte, x vir GP-Engels en y vir Frans, word soos volg opgesom:

$$\begin{aligned}\sum x &= 578 & \sum y &= 607 & \sum x^2 &= 38378 \\ \sum y^2 &= 41221 & \sum xy &= 39070\end{aligned}$$

- 3.1 Bereken die gemiddelde punt vir GP-Engels en Frans. (2)
- 3.2 Bereken vervolgens die vergelyking van die regressielyn y op x . (6)
- 3.3 Bereken die korrelasiekoëffisiënt tussen GP-Engels en Frans. Die formule vir die berekening van die korrelasiekoëffisiënt is soos volg:

$$r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}} \quad (3)$$

Twee ander leerders, Allie en Danny, was afwesig vir een eksamenvraestel. Allie het 85 behaal in GP-Engels, maar was afwesig vir Frans en Danny het 65 behaal in Frans, maar was afwesig vir GP-Engels.

- 3.4 Dui aan vir watter leerder dit toepaslik sal wees om die regressielyn wat hierbo bereken is te gebruik om 'n punt te beraam vir die eksamenvraestel waarvoor die leerder afwesig was. Bereken die beraamde punt. (3)
- 3.5 Lewer kortliks kommentaar oor die betroubaarheid van hierdie beraamde punt. (2)

[16]

VRAAG 4

- 4.1 Professor Dayle Vadi beweer: "Ten spyte van groter wetstoepassingpogings het renosterstropery **met 'n gemiddelde van minstens 10 renosters per provinsie** per jaar in Suid-Afrika **toegeneem**."

Die tabel hieronder is 'n uiteensetting van die getal renosters gestroop per provinsie vir vyf verskillende gebiede vir die tydperke 2010 en 2011.

Provinsie	2010	2011
Nasionale Krugerwildtuin	146	252
Noord-Wes	57	22
Limpopo	52	73
KwaZulu-Natal	38	34
Mpumalanga	17	31

- (a) Bereken die gemiddelde en standaardafwyking (tot een desimale plek) vir renosters gestroop per provinsie vir die jare 2010 en 2011. (Beskou Nasionale Krugerwildtuin as 'n afsonderlike provinsie.) (4)
- (b) Stel vervolgens 'n formele hipotesetoets by die 10%-betekenispeil op om Professor Vadi se bewering te toets. (Neem aan die steekproef kom uit 'n normaalverdeling.) (10)

- 4.2 'n Nasionale veiligheidsraad wil die proporsie motorongelukke waarby voetgangers betrokke is, beraam. Hoe groot moet die steekproef van ongeluksrekords wees wat ondersoek moet word om 94% vertroue te hê dat die beraaming nie met meer as 0,04 van die ware proporsie verskil nie? Die beraamde proporsie is 0,25. (6)
[20]

VRAAG 5

'n Opname is by Hoërskool Aphane gedoen om te bepaal watter proporsie van die leerders Facebook- en Twitter-rekeninge het. 'n Ewekansige steekproef het die volgende getoon:

- As 'n leerder 'n Twitter-rekening het, het die leerder ook 'n Facebook-rekening.
- As 'n leerder nie 'n Twitter-rekening het nie, is daar 'n 90%-kans dat die leerder wel 'n Facebook-rekening het.
- Die waarskynlikheid dat leerders 'n Twitter-rekening het, is 0,36.

- 5.1 Teken 'n Venn-diagram om die inligting wat hierbo gegee word, uit te beeld. (10)

5.2 Bereken:

- (a) Die waarskynlikheid om 'n Facebook-rekening te hê. (2)
- (b) Die waarskynlikheid om nóg 'n Facebook-rekening nóg 'n Twitter-rekening te hê. (1)

[13]

VRAAG 6

Twee leerders, Alicia en Rae, by Faul Skool het aan die einde van die jaar onderskeidelik 98% en 40% vir Wiskunde behaal. Die groepgemiddelde vir die betrokke graad was 56% met 'n standaardafwyking van 18%, wat as te laag beskou is. Die gemiddelde is tot 60% aangepas met 'n standaardafwyking van 12%.

- 6.1 Bereken hoeveel standaardafwykings Alicia en Rae se punte van die oorspronklike gemiddelde is. (2)
 - 6.2 Bereken vervolgens hul nuwe punte nadat die aanpassing gedoen is. (6)
 - 6.3 Gee 'n aanvaarbare rede waarom die standaardafwyking verlaag is. (1)
- [9]**

Totaal vir Module 2: 100 punte

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING**VRAAG 1**

- 1.1 Ihsaan se vriende en familie het vir hom kontant gegee as geskenk vir sy agtiende verjaardag. Hy beplan om hierdie bedrag wat op R5 600 te staan kom, te belê teen 'n jaarlikse rentekoers van 6,84%, kwartaalliks saamgestel. Bereken die rente wat hierdie eenmalige belegging oor vyf jaar sal verdien. (4)
- 1.2 Rosa deponeer aan die einde van elke kwartaal geld in 'n spaarrekening wat ook 'n jaarlikse rentekoers van 6,84%, kwartaalliks saamgestel, verdien. Bereken die waarde van haar gelyke kwartaallikse deposito's as hierdie rekening oor 'n vyfjaar-tydperk tot R10 033,38 aangroei. (6)
- 1.3 Solly deponeer aan die einde van elke kwartaal R420 in 'n spaarrekening wat ook 'n jaarlikse rentekoers van 6,84% verdien. By die bank wat hy gekies het, word rente egter maandeliks saamgestel. Bereken die waarde waartoe sy belegging oor 'n vyfjaartydperk sal aangroei. (10)
- [20]**

VRAAG 2

Gedurende die eerste twee jaar van die lewensduur van 'n nuwe motor is die waardevermindering daarvan gewoonlik taamlik hoog teen 12% per jaar. Gedurende die derde jaar is waardevermindering effens laer teen 10,5%. Vir die vierde, vyfde en sesde jaar bly waardevermindering konstant.

Die jaarlikse waardeverminderingskoers oor die eerste 6 jaar van die lewensduur van 'n motor word in die tabel hieronder getoon:

Jaar	1	2	3	4	5	6
Waardeverminderingskoers	12%	12%	10,5%	$x\%$	$x\%$	$x\%$

Bereken x as die gemiddelde jaarlikse waardeverminderingskoers oor die 6 jaar 10% per jaar is. Gee jou antwoord as 'n persentasie, korrek tot twee desimale plekke.

[8]**VRAAG 3**

Andile verkry 'n huislening vir R850 000 by 'n bank teen 'n jaarlikse rentekoers van 8,56%, maandeliks saamgestel. Hy stem in om R7 400 per maand aan die einde van elke maand terug te betaal.

- 3.1 Bereken die verwagte uitstaande saldo op die lening onmiddellik na die 80^{ste} betaling. (8)
- 3.2 Bykomend tot sy maandelikse terugbetalings deponeer Andile by twee geleenthede sy jaarlikse bonus in hierdie rekening om sy huislening te verreken. Hierdie deposito's van R12 000 elk het saamgeval met die 17^{de} en 65^{ste} betaling. Bereken die nuwe uitstaande saldo op die lening onmiddellik na die 80^{ste} betaling. (8)
- 3.3 Na die 80^{ste} betaling bereken Andile dat as hy sy betaling tot R7 100 per maand verlaag, hy sy verband na 'n verdere 160 betalings kan afbetaal, waarvan die laaste betaling minder as R7 100 sal wees. In die veronderstelling dat die uitstaande saldo na die 80^{ste} betaling R675 000 is, bereken die waarde van die finale betaling. (10)
- [26]**

VRAAG 4

Volgens Discovery Channel se NatGeo Wild veroorsaak wilde varke in Noord-Amerika elke jaar skade van miljoene dollars aan landbougrond. Ten spyte van hul spoor van verwoesting is hulle verbasend moeilik om vas te trek. Hulle vreet byna enigiets van wortels tot afval en dit lyk nie of ander diere hulle vreet nie.

'n Sog (vroulike vark) het drie werpsels per jaar, elk met 'n gemiddelde grootte van vier varkies, waarvan 60% vroulik sal wees. Die oorlewingskoers van die varkies is hoog teen 80%. Die gemiddelde vark leef vir ongeveer sewe jaar in die wildernis.

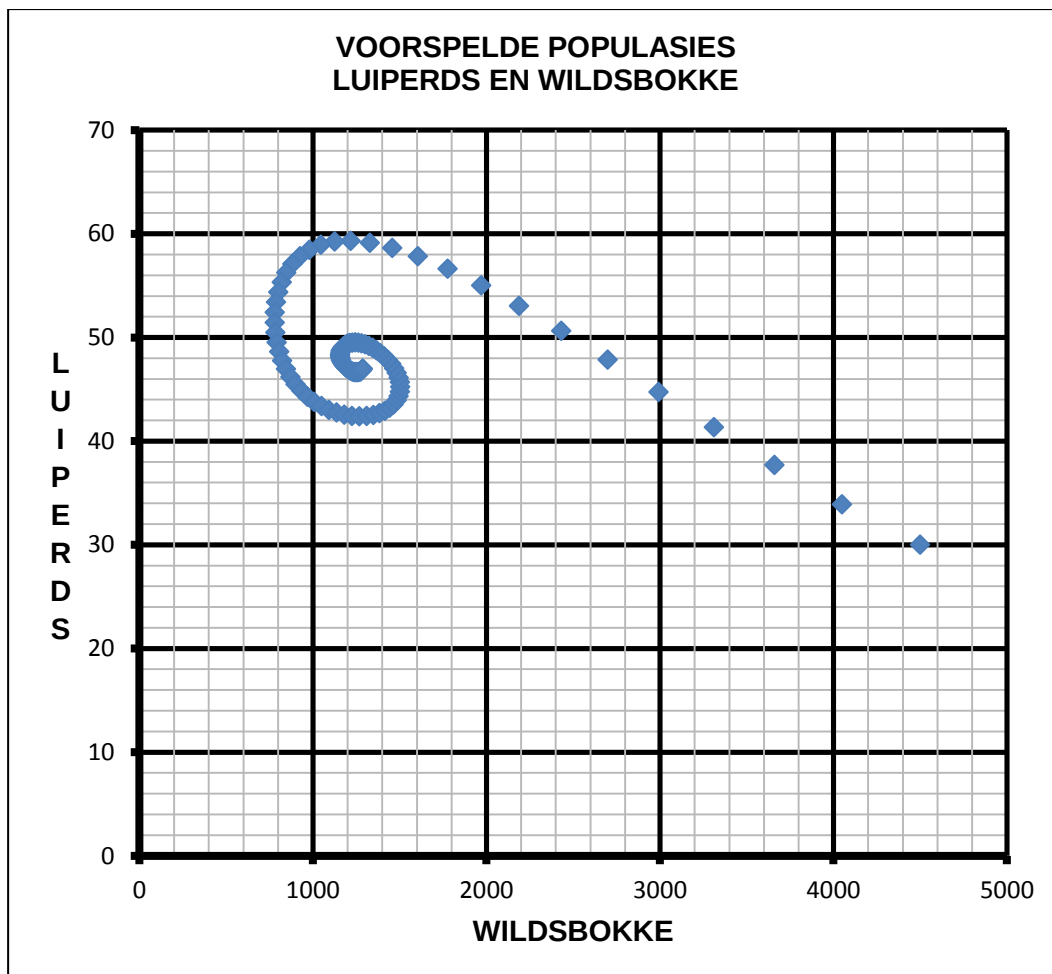
- 4.1 Bereken die jaarlikse aanwas van die wilde varke, korrek tot drie desimale plekke. (6)
- 4.2 Druk die toename in die varkpopulasie as 'n rekursieformule uit deur 'n aanwas van 5,6 varke per jaar te gebruik. (2)
- 4.3 Bereken die varkpopulasie na twee jaar as daar tans 25 varke op die plaas is. Gebruik 'n aanwas van 5,6 varke per jaar. (2)
- 4.4 Die boer besluit om die varke onmiddellik op 'n **weeklikse basis** te begin uitwis. Bereken die minimum getal varke wat hy **per week** vir die volgende jaar moet doodmaak net om die getal varke naastenby op die huidige vlak te hou. Toon 'n geskikte berekening ter ondersteuning van jou antwoord, afgerond tot die naaste heelgetal. (6)

[16]

VRAAG 5

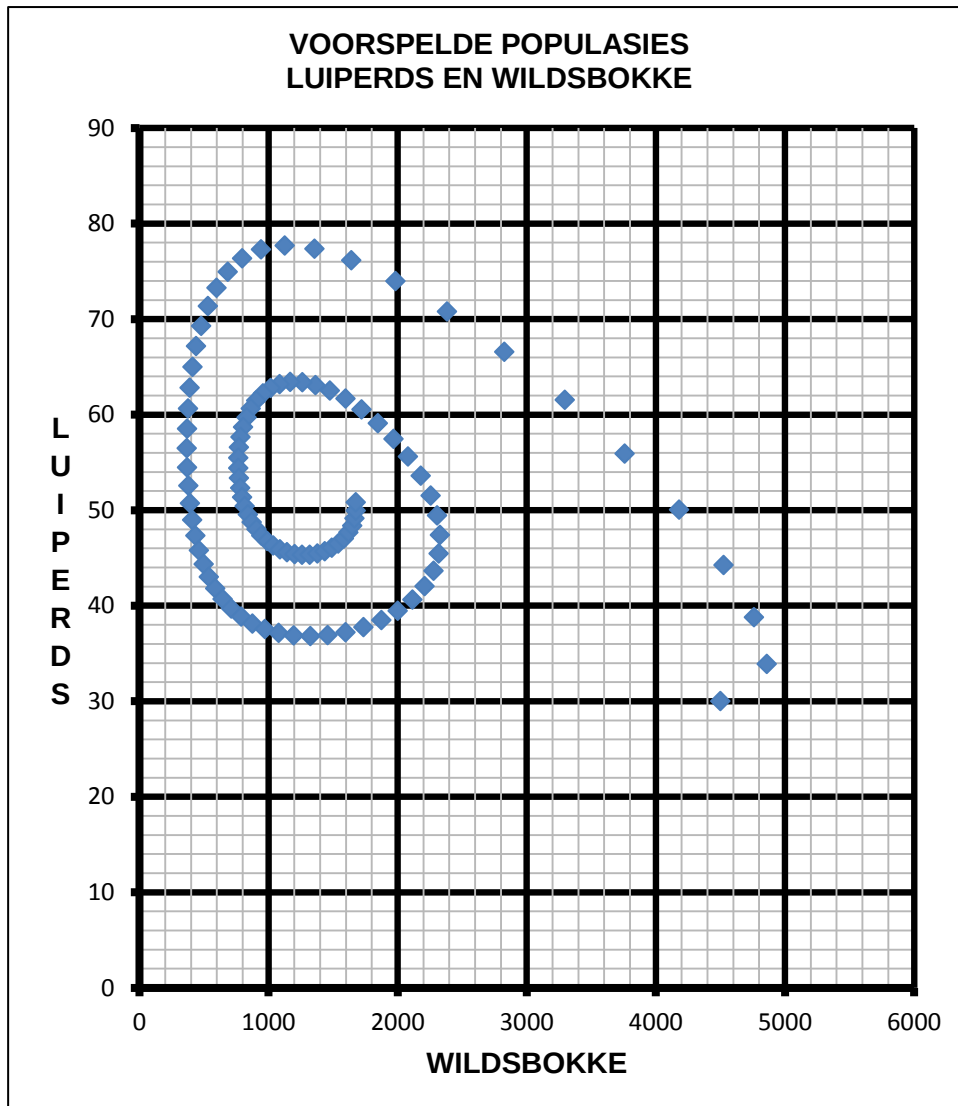
Okapuka is 'n private wildsplaas van 10 000 hektaar net 20 km buite Windhoek, Namibië. Dit is die tuiste van 'n verskeidenheid diere, met inbegrip van talle wildsbokspesies wat saam 'n populasie van ongeveer 4 500 het. Wildbewaarders het luiperdspore bestudeer en hulle beraam dat daar 30 luiperds in die meer bergagtige gebiede van die plaas is.

- 5.1 Die fasediagram hieronder verteenwoordig die voorspelde populasies luiperds en wildsbokke oor die volgende eeu by Okapuka.



- Lees die ewewigpopulasie vir elke spesie af. (2)
- Gee die variasiewydte van die luiperdpopulasie wanneer die wildsbokpopulasie vir die eerste keer toeneem. (2)
- Lees die benaderde wildsbokpopulasie af wanneer die luiperdpopulasie die vinnigste daal. (2)
- In die eerste jaar van hierdie model het luiperds ongeveer 420 wildsbokke doodgemaak. Bereken die waarde van die parameter b in die roofdier-prooi formule (korrek tot vyf desimale plekke). (5)
- In die eerste jaar van die model het vier luiperdwelpies oorleef. Bereken die waarde van die parameter f in die roofdier-prooi formule (korrek tot vyf desimale plekke) deur $b = 0,003$ te gebruik. (5)

- 5.2 Die Okapuka Wildsplas oorweeg dit om honderde hektaar aangrensende grond te koop. Hierdeur kan sy huidige grense uitgebrei word en sal die dravermoë van wildsbokke aansienlik verhoog word. Die fasesdiagram hieronder verteenwoordig die nuwe voorspelde populasies wildsbokke en luiperds oor die volgende eeu.



Vergelyk hierdie fasesdiagram met dié in Vraag 5.1 en lewer dan kommentaar oor die volgende aspekte:

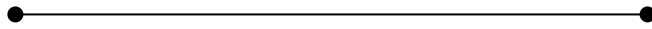
- (a) die manier waarop die aanvanklike populasie van elke spesie verander. (2)
- (b) die populasievariasiewydte van elke spesie. (2)
- (c) die tempo waarteen die ewewigspunt bereik word. (2)

[22]

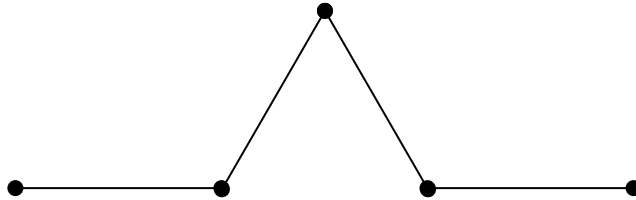
VRAAG 6

Von Koch se Sneeuwvlokkie is 'n bekende fraktal gebaseer op 'n rekursietema.

Stap 1: lengte 27 eenhede

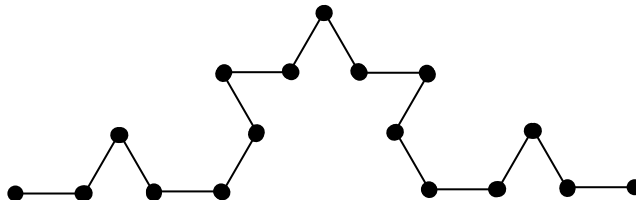


Stap 2: lengte 36 eenhede



Dit word verkry deur die oorspronklike lynsegment in Stap 1 gelyk in drie te verdeel. Op die middelste een van die drie gedeeltes is 'n gelyksydige driehoek gekonstrueer.

Stap 3: lengte 48 eenhede



Dit word verkry deur elkeen van die vier lynsegmente in Stap 2 weer gelyk in drie te verdeel. Op elkeen van die middelste gedeeltes van elkeen van die vier lynsegmente in Stap 2 word nog 'n gelyksydige driehoek gekonstrueer.

- 6.1 Skryf 'n eersteorde-rekursieformule neer wat die lengte van die n^{de} fraktalvorm verteenwoordig. (4)
 - 6.2 Bepaal watter stap die eerste sal wees waar die lengte 1 000 eenhede oorskry. Gee ook hierdie lengte, korrek tot drie desimale plekke. (4)
- [8]**

Totaal vir Module 3: 100 punte

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE**VRAAG 1**

Drie matrikse $L \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ en $N \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ word gegee.

- 1.1 Bereken $2M - 3N$. (4)
 - 1.2 Verduidelik in woorde waarom L geen inverse het nie. (2)
 - 1.3 Verduidelik in woorde waarom M geen inverse het nie. (2)
 - 1.4 Skryf die inverse van N neer met heelgetalwaardes vir die elemente van die matriks. (4)
- [12]**

VRAAG 2

- 2.1 Die koördinate van die eindpunte van 'n lynsegment in 'n Cartesiese vlak is $(2 ; -4)$ en $(2 ; 5)$. Die lynsegment moet getransformeer word deur 'n dwarsdruk van faktor 3, met die x -as as die invariante lyn. Bereken die koördinate van die eindpunte van die lynsegment nadat dit getransformeer is. (6)
 - 2.2 'n Figuur moet gereflekteer word in die lyn met vergelyking $y = 3x$. Gee die matriks wat hierdie transformasie sal bewerkstellig. Die elemente van die matriks moet akkuraat wees tot een desimale plek. (6)
 - 2.3 'n Figuur in 'n Cartesiese vlak moet getransformeer word sodat die beeld daarvan 'n oppervlakte het wat drie keer die oorspronklike oppervlakte is. Gee twee verskillende matrikse wat gebruik kan word om hierdie transformasie te bewerkstellig. Die twee matrikse moet verskillende tipes transformasies verteenwoordig. (4)
 - 2.4 Die punt $P(25 ; -75)$ moet om die oorsprong geroteer word sodat die beeld daarvan koördinate $P'(-45 ; 65)$ het. Bepaal die rotasiehoek (in grade en korrek tot twee desimale plekke). (8)
- [24]**

VRAAG 3

3.1 Beskou die matrikse $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 6 \\ -12 & -10 & -9 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

Toon deur berekening dat $AB \neq BA$.

(8)

3.2 'n Matriks word gegee in die vorm $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Gebruik hierdie matriks en toon deur berekeninge dat die produk van 'n matriks en sy getransponeerde altyd simmetries om die hoofdiagonaal sal wees.

(Onthou: die 'getransponeerde' van 'n matriks word gevind deur die rye en die kolomme te verwissel.)

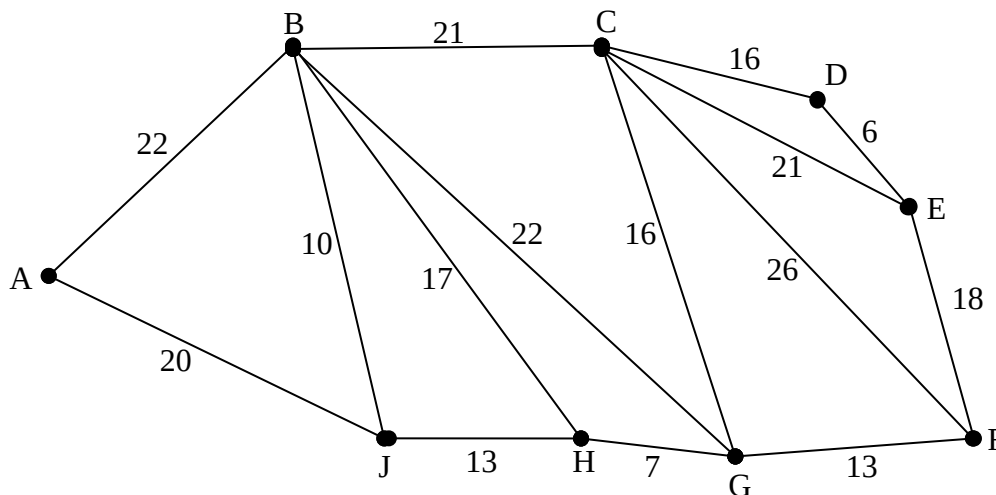
(10)

[18]

VRAAG 4

By die wêreldbekende Kirstenbosch Botaniese Tuin in Kaapstad is 'n gedeelte uitgelê wat as die Braille-wandelpad bekend is. Besoekers word aangemoedig om die plantlewe sonder hul sig deur hul ander sintuie te ervaar deur hul oë toe te maak en op die pad begelei te word deur aan toue vas te hou.

Die grafiek hieronder (wat nie op skaal geteken is nie) verteenwoordig die Braille-wandelpad, met nodus A wat beide die toegangs- en uitgangspunt op die pad is. Die skakels van die grafiek stem ooreen met die gidstoue langs die lane, en die gewig van die skakels stem ooreen met die lengte van die toue in meter.

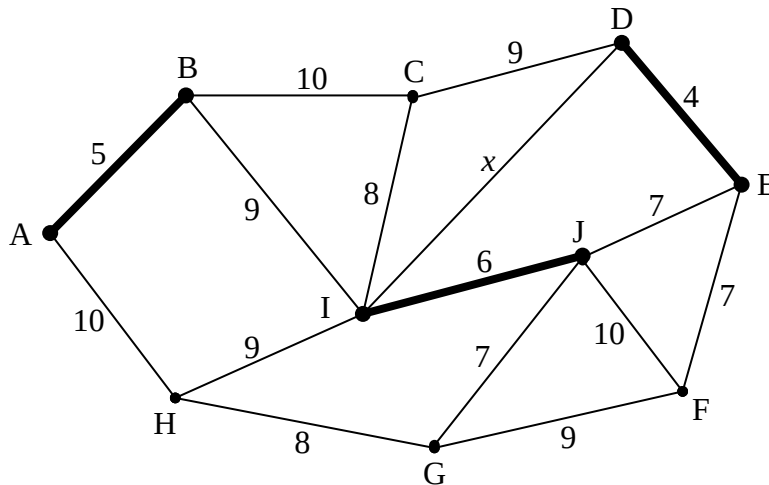


- 4.1 Beamptes beveel aan dat die minimum afstand wat 'n besoeker moet stap die omtrek van die pad is, naamlik $ABCDEF GHJA$. Dit sal in werklikheid 'n Hamilton-kring skep. Verduidelik in woorde wat 'n kring 'n Hamilton-kring maak. (2)
- 4.2 Om die Braille-wandelpad ten volle te ervaar moet besoekers elke laan in die pad stap. Ontwerp 'n Euler-kring van minimum lengte sodat 'n besoeker die pad ten volle ervaar. Dui die werklike kring en die lengte van die kring duidelik aan. (12)
- 4.3 Landskapsargitekte beplan om 'n nuwe laan uit te lê wat C en J direk sal verbind. Hulle besluit dat, met inbegrip van die nuwe laan CJ, 'n besoeker nie 'n Euler-kring van meer as 300 meter sal hoef te loop nie. Bereken wat die maksimum lengte van die nuwe laan moet wees. (10)

[24]

VRAAG 5

In die grafiek wat hieronder geskets is, het 'n student begin om 'n spanboom van minimum lengte te bepaal. Die eerste drie skakels wat sy gekies het, is vet gedruk.

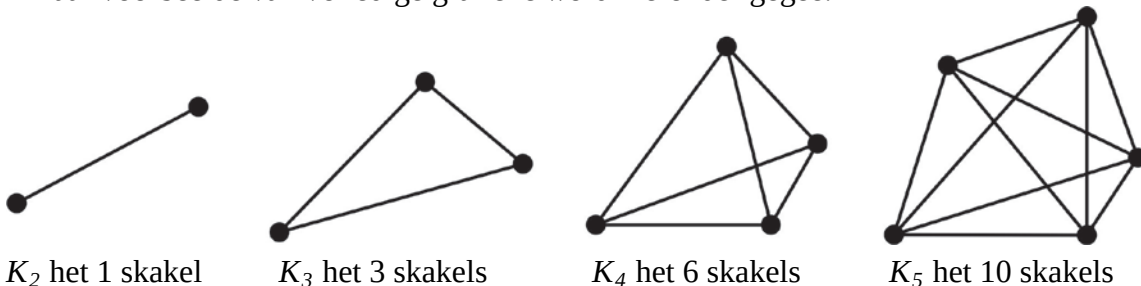


- 5.1 Dui die getal skakels aan wat die voltooië spanboom sal hê. (2)
 - 5.2 Dui aan of die student Kruskal of Prim se algoritme gebruik. Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)
 - 5.3 As DI die volgende skakel moet wees wat gekies word, dui aan watter gewig DI moet hê. (2)
 - 5.4 Drie skakels het 'n gewig van 7. Dui aan watter een van hierdie skakels NIE gekies moet word nadat DI reeds gekies is nie. Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)
 - 5.5 Voltooi die spanboom van minimum lengte vir hierdie grafiek. Neem aan dat die skakels DE, AB, IJ en DI reeds gekies is. Dui die lengte van hierdie minimum spanboom aan. (8)
- [16]

VRAAG 6

In 'n **volledige** grafiek word elke nodus direk met elke ander nodus verbind. 'n Volledige grafiek word deur K_n aangedui, waar n die getal nodusse in die grafiek is.

'n Paar voorbeelde van volledige grafieke word hieronder gegee:



- 6.1 Noem die getal skakels in die volledige grafiek K_6 . (3)
 - 6.2 Dui aan vir watter positiewe heelgetalwaardes van n die volledige grafiek K_n 'n Euler-kring van self sal bevat. (3)
- [6]

Totaal vir Module 4: 100 punte

Totaal: 300 punte