

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE

Tyd: 3 uur

300 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 18 bladsye, 'n Antwoordblad van 3 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i – iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.

2. Hierdie vraestel bestaan uit VIER modules:

MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA (200 punte) is verpligtend.

Kies **EEN** van die **DRIE** opsionele modules:

MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF

MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF

MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte)

3. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
 4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
 5. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
 6. Trigonometriese berekeninge in Module 1 moet gedoen word deur radiale te gebruik en antwoorde moet in radiale gegee word.
 7. Beantwoord elke module in 'n afsonderlike Antwoordboek.
 8. Rond jou antwoorde af tot twee desimale syfers, tensy anders aangedui. Gee waarskynlikhede vir die Statistiekmodule korrek tot 4 desimale plekke.
-

MODULE 1 CALCULUS EN ALGEBRA

VRAAG 1

Bewys deur induksie dat vir alle natuurlike getalle, $n \geq 1$ en $r \neq 1$:

$$\sum_{i=1}^n r^{i-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

[14]

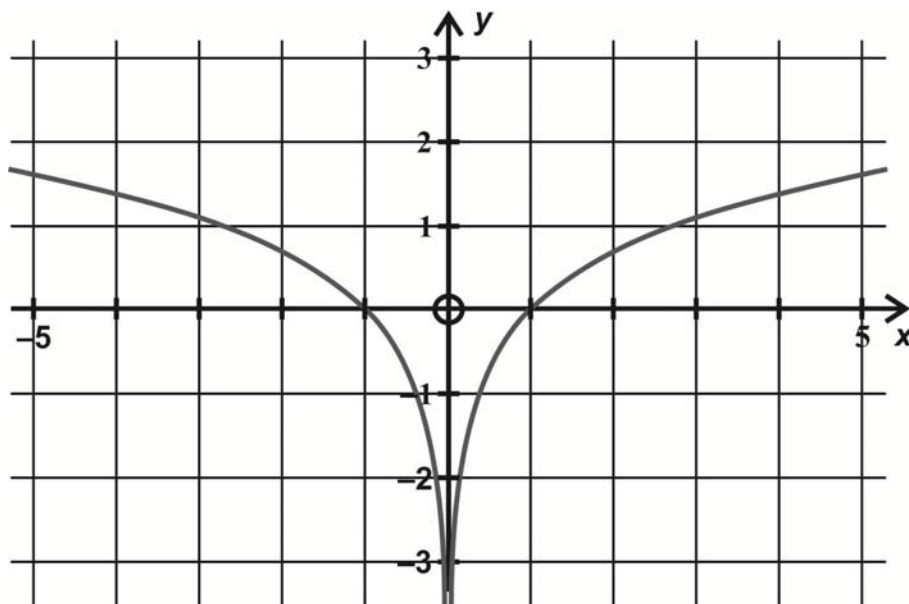
VRAAG 2

2.1 Los op vir x sonder die gebruik van 'n sakrekenaar as

$$\log_5(x+3) - \log_{\frac{1}{5}}(x-2) - \log_5 2 = 2$$

(8)

2.2 Hieronder is die grafiek van $f(x) = \ln|x|$



Teken in die **Antwoordblad** wat voorsien is die grafiek van $g(x) = |f(x)| - 1$, met enige afsnitte met die asse duidelik aangetoon.

(10)

2.3 Gegee: $f(x) = \sqrt{x-2}$ en $g(x) = \ln(1-x^2)$ met $x \in \mathbb{R}$

(a) Bepaal $g(f(x))$.

(4)

(b) Gee die definisiegebied van $g(f(x))$.

(6)

(c) Verduidelik waarom $g(f(x)) \leq 0$.

(4)

[32]

VRAAG 3**Onthou** $i = \sqrt{-1}$.

- 3.1 Bepaal die waardes van a en b , waar a en b reëel is, wat die vergelyking $\frac{(a+3i)}{(2-5i)} \times bi = -11-13i$ bevredig. (8)
- 3.2 Bepaal die som $\sum_{n=1}^4 2i^n$. (5)
- 3.3 Bepaal 'n kwadratiese vergelyking met reële koëffisiënte wat $x = \sqrt{3} - i$ as een van sy wortels het. (6)
- [19]**

VRAAG 4

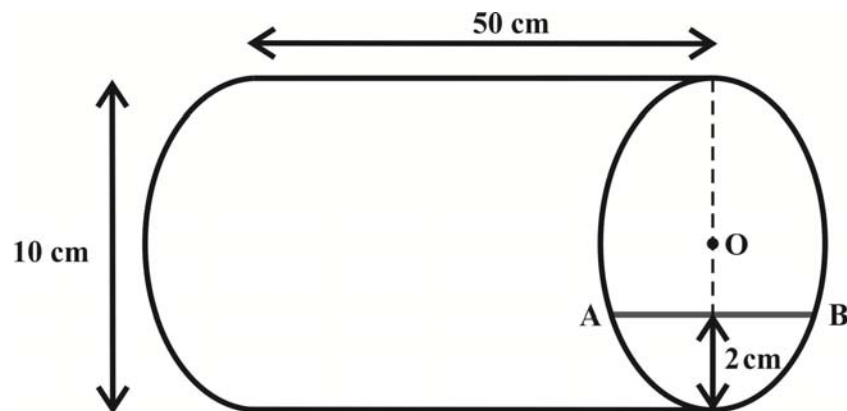
- 4.1 Bepaal vanuit eerste beginsels die afgeleide van $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. (8)
- 4.2 Gegee: $f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{as } x \geq \pi \\ \sin x & \text{as } x < \pi \end{cases}$
- (a) Wys dat die funksie f kontinu is by $x = \pi$. (6)
- (b) Bepaal of die funksie f differensieerbaar is by $x = \pi$. (6)
- [20]**

VRAAG 5

Gegee dat $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 4}{x - 3}$.

- 5.1 Bepaal die vergelyking van enige asimptoot van die funksie f . (8)
 - 5.2 Bepaal die koördinate van enige draaipunte van die funksie f (korrek tot 2 desimale plekke) en bepaal deur middel van berekening of hulle plaaslike maksima of minima is. (12)
 - 5.3 Bepaal die x - en y -afsnitte van die funksie f . (6)
 - 5.4 Skets die grafiek van $f(x)$ op die asse wat voorsien is, op die Antwoordblad. (8)
- [34]**

VRAAG 6

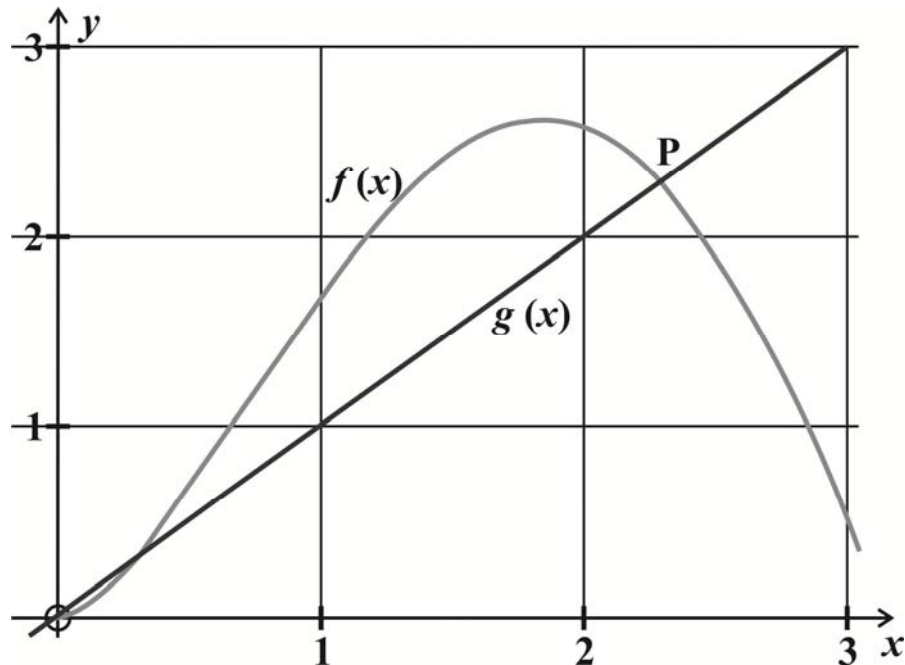


'n Silindriese pyp met 'n deursnee van 10 cm en 'n lengte van 50 cm lê op sy sy en daar is water binne-in tot 'n diepte van 2 cm.

- 6.1 Toon dat die breedte van die oppervlak van die water (die lengte AB in die diagram) 8 cm is. (4)
 - 6.2 Bepaal vervolgens die volume water in die pyp. (9)
- [13]**

VRAAG 7

Hieronder is 'n skets van die grafieke $f(x) = 2\sqrt{x} \sin x$ en $g(x) = x$. Die grafieke sny op drie plekke in die definisiegebied $x \in [0; 3]$. P is die snypunt van f en g , soos op die grafiek aangedui.



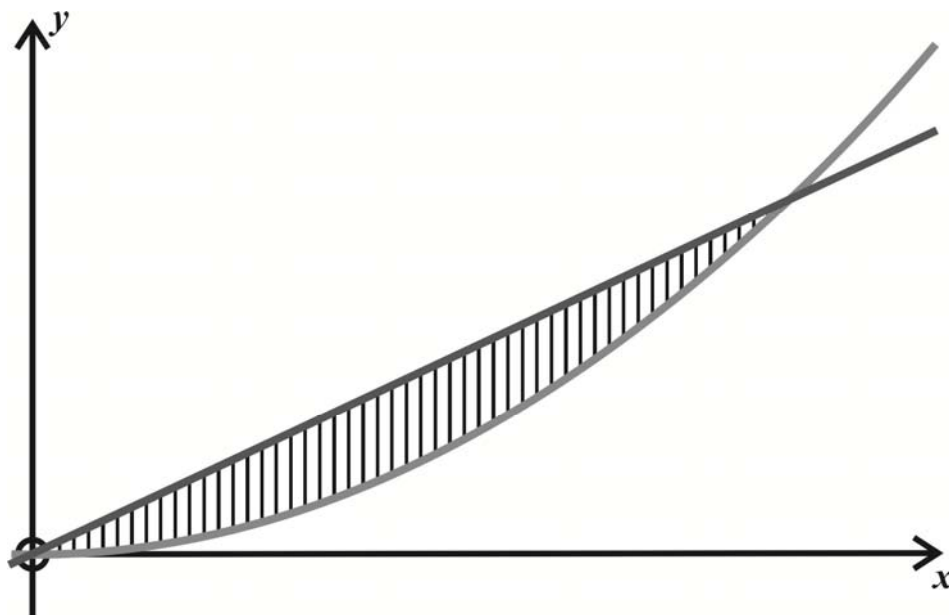
- 7.1 Bepaal die afgeleide $f'(x)$. (6)
- 7.2 Gee die iterasieformule wat jy sal gebruik om $f(x) = g(x)$ op te los deur die Newton-Raphson-metode te gebruik. (6)
- 7.3 Bepaal die x -koördinaat van P, korrek tot 4 desimale plekke. (4)
- [16]**

VRAAG 8

- 8.1 Bepaal die volgende integrale:

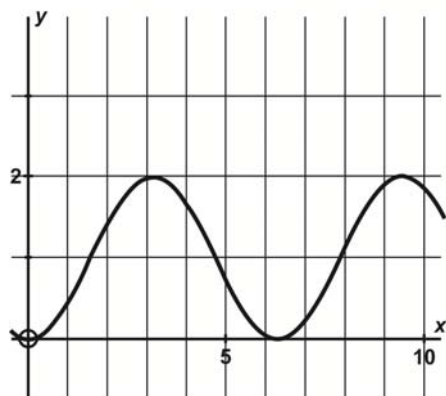
- (a) $\int (2x+1) \cos 2x \, dx$ (10)
- (b) $\int x^2 \sec^2(2x^3) \, dx$ (8)
- (c) $\int \cot^2 2x \cdot \operatorname{cosec}^2 2x \, dx$ (8)

- 8.2 Bepaal die volume van die vaste liggaam wat gegenereer word deur die oppervlakte wat begrens word deur die krommes $y = x$ en $y = x^2$ om die x -as te roteer, soos aangedui deur die gearseerde gebied hieronder. (10)

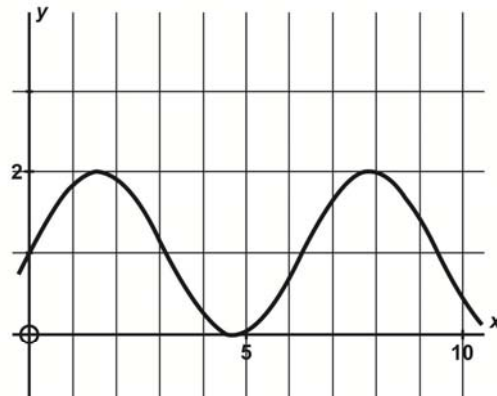


- 8.3 Hieronder is vier grafieke. Twee van die grafieke vorm 'n paar bestaande uit 'n funksie en sy integraalfunksie. Meld die paar en dui aan watter een die funksie en watter een die integraalfunksie is. (6)

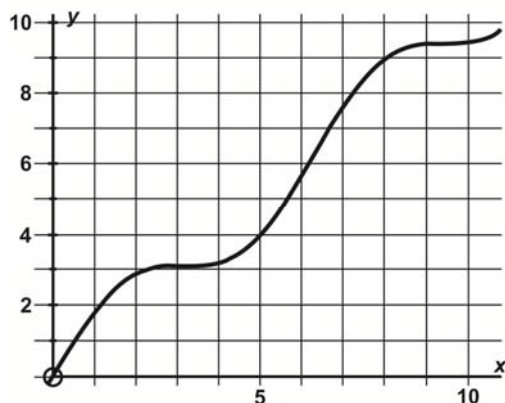
FUNKSIE A



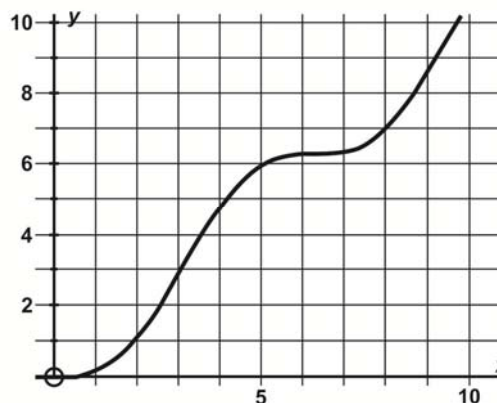
FUNKSIE B



FUNKSIE C

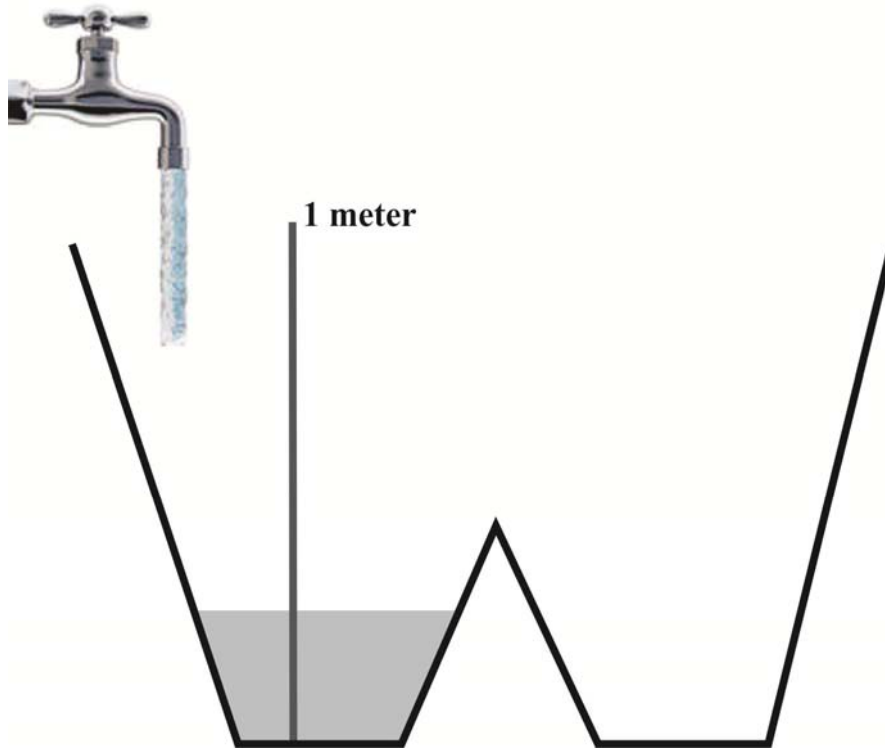


FUNKSIE D



VRAAG 9

Daar is tans 'n klein hoeveelheid water in 'n W-vormige houer soos hieronder getoon. Die houer is 'n prisma wat deurgaans die W-dwarssnit het. 'n Kraan word oopgedraai sodat die water teen 'n konstante tempo in die linkerkant van die houer inloop. Skets 'n grafiek van die hoogte van die water, h , soos aangedui op die meterstok wat aan die linkerkant van die houer getoon word, as 'n funksie van tyd, t . Benoem jou grafiek duidelik en toon alle knakpunte met verduidelikings waar jy voel dit is nodig.

**[10]****Totaal vir Module 1: 200 punte**

MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

Ilham en Robyn ontleed die tye geneem om by die werk te kom van 'n steekproef mense wat per motor of bus ry. Hul data word in die tabel opgesom.

Motor	Bus
$\bar{x} = 29,6$ min	$\bar{x} = 25,2$ min
$\sigma = 5,2$ min	$\sigma = 2,8$ min
$n = 45$ bestuurders	$n = 55$ passasiers

Ilham kom op grond van hierdie data tot die gevolgtrekking dat dit in die geheel vinniger is om per bus te ry. Robyn is versigtiger. Sy voel dat die verskil tussen die gemiddeldes ook getoets moet word by die 4%-betekenispeil.

- 1.1 Verduidelik waarom Robyn slim is om 'n verdere toets te doen. (3)
 - 1.2 Voer die toepaslike hipotesetoets uit om Robyn se besluit oor of daar 'n betekenisvolle verskil in die rytyd per motor en per bus is te help duidelik maak. (10)
 - 1.3 Wat is die implikasie daarvan om die betekenispeil te verhoog? (2)
- [15]**

VRAAG 2

- 2.1 By die matriekafskeid word 12 leerders (6 pare) ewekansig in 'n ry gerangskik vir 'n foto. Bepaal die waarskynlikheid dat elke meisie langs haar metgesel staan. (6)
 - 2.2 Nege mans is gretig om vir 'n sosiale span van vier muurbalspelers gekies te word. Twee van hulle sal nie saam speel nie, maar elkeen is bereid om in die afwesigheid van die ander een te speel. Op hoeveel verskillende maniere kan die span gekies word? (6)
 - 2.3 Paige en Kerry is entoesiastiese boogskutters. Die waarskynlikheid dat Paige 'n teiken suksesvol sal tref, is 0,7. Die waarskynlikheid dat Kerry die teiken suksesvol sal tref, is 0,6. Wanneer hulle albei ook al onafhanklik na die teiken skiet, wat is die waarskynlikheid dat:
 - (a) slegs een van hulle suksesvol is? (6)
 - (b) minstens een van hulle suksesvol is? (6)
- [24]**

VRAAG 3

- 3.1 Laura wil graag 'n tweedehandse motor koop. Sy stel ondersoek in na die ouderdom, x jaar, en die prys, R_y (in duisende), van tien tweedehandse voertuie van 'n bepaalde soort. Die data word hieronder getoon:

x	6	2	9	5	13	4	7	8	3	10
y	279	599	85	310	65	335	379	135	459	99

- (a) Bereken en interpreteer die korrelasiekoëffisiënt in 'lewenswerklike' terme. (3)
- (b) Bereken die kleinste kwadrate-regressielyn. (4)
- (c) Beraam die aanvanklike waarde van hierdie tipe voertuig. (2)
- (d) Lewer kommentaar oor die geldigheid van die voorspelling hierbo. (2)
- 3.2 Die regressievergelyking om die getal kredietkaarte (Y) wat 'n gesin in terme van die gesinsgrootte (X_1) en die maandelikse gesinsinkomste (X_2) (in R'000) sal gebruik, word gegee deur:

$$Y = 0,482 - 0,63X_1 + 0,216X_2$$

Wat is die waarskynlike inkomste van 'n gesin van 7 wat 3 kredietkaarte gebruik? (3)

[14]

VRAAG 4

Die waarskynlikheidsdigtheidfunksie van die afstand x , in meter, wat 'n missiel vanaf die beoogde teiken sal val, word gegee as:

$$f(x) = \begin{cases} k(x-3) & \text{vir } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- 4.1 Toon dat $k = \frac{-2}{9}$. (5)
- 4.2 Bereken die waarskynlikheid dat die missiel binne een meter van die beoogde teiken sal val. (3)
- 4.3 Bereken die mediaanafstand wat 'n missiel van die teiken af val. (8)
- [16]**

VRAAG 5

In 'n sekere regiment volg die lengte van die soldate 'n normaalverdeling met gemiddelde 172 cm en variansie 25 cm^2 .

- 5.1 Watter persentasie van die soldate het 'n lengte tussen 156 cm en 170 cm? (9)
- 5.2 As slegs die kortste 10% van die regiment geskik sal wees vir 'n spesifieke taak, wat is die maksimum lengte wat vir die taak toegelaat kan word? (6)
- [15]**

VRAAG 6

'n Tenk bevat 10 gemerkte visse en 50 ongemerkte visse. Elke dag word 4 visse ewekansig uit die tenk gekies en vir waarneming saam in 'n afsonderlike tenk geplaas. Later dieselfde dag word die 4 visse teruggeplaas in die oorspronklike tenk.

- 6.1 Toon dat die waarskynlikheid om op 'n gegewe dag geen gemerkte visse te kies nie, 0,4723 is. (6)
- 6.2 Wat is die waarskynlikheid om op 'n gegewe dag minstens een gemerkte vis te kies? (4)
- 6.3 Bereken die waarskynlikheid dat geen gemerkte vis elke dag vir sewe gegewe dae gekies sal word nie. (6)
- [16]**

Totaal vir Module 2: 100 punte

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING**VRAAG 1**

Lindiwe verkry 'n lening van R2 000 by 'n uitleenskurk wat haar 'n weeklikse rentekoers vra. Sy kom ooreen om die lening in weeklikse paaieimente terug te betaal totdat die lening ten volle terugbetaal is.

Hierdie situasie kan as 'n eersteorde-rekursievergelyking uitgedruk word:

$$T_{n+1} = 1,08.T_n - 200, \text{ met } T_0 = 2\,000$$

- 1.1 Gee die waarde van Lindiwe se weeklikse paaieimente. (1)
 - 1.2 Gee die weeklikse rentekoers wat gevra word. (2)
 - 1.3 Bereken die uitstaande saldo's net na haar 19^{de} en 20^{ste} betaling. (3)
 - 1.4 Bereken hoeveel van haar 20^{ste} betaling rente op die uitstaande saldo is. (3)
 - 1.5 Bereken hoeveel sy die uitleenskurk in totaal betaal het sodra die lening ten volle terugbetaal is. (4)
- [13]**

VRAAG 2

'n Maatskappy begin onmiddellik met maandelikse bydraes tot 'n delgingsfonds om verouderde masjinerie oor **agt** jaar te vervang. Die vervangingskoste van die masjinerie sal na verwagting R2 500 000 wees en die fonds verdien 'n effektiewe rentekoers van 8,73% per jaar.

- 2.1 Bereken die persentasie toename in die waarde van die masjinerie van die huidige waarde tot die verwagte vervangingswaarde oor agt jaar indien die jaarlikse inflasiekoers vir masjinerie 12,14% is. (5)
 - 2.2 Bereken die waarde waartoe die delgingsfonds moet aangroei indien voorsiening gemaak moet word vir 'n jaarlikse instandhoudingskontrak van R50 000 vir die bestaande masjinerie aan die einde van elke jaar vir die eerste **sewe** jaar. (8)
- [13]**

VRAAG 3

'n Getroude paar beplan om elke kwartaal R10 000 in 'n bankrekening te belê, wat **onmiddellik begin**. Die rekening verdien 6,5% rente per jaar, kwartaalliks saamgestel, vir die eerste 12 jaar, en 6,82% per jaar, kwartaalliks saamgestel, vir die volgende ses jaar. Hul laaste betaling sal nege maande voor die einde van die 18^{de} jaar gedoen word.

- 3.1 Bereken die waarde waartoe hul belegging sal aangroei. (14)
 - 3.2 Die egpaar beoog om gelyke bedrae aan elkeen van hul drie kinders (Jen, Ken en Len) te gee op elkeen se 18^{de} verjaardag. Jen is twee en 'n half jaar oud, Ken is een jaar oud en Len is pas gebore. Bereken wat elke kind sal ontvang in die veronderstelling dat die egpaar se belegging tot R1 375 000 aan die einde van 18 jaar aangroei. (10)
- [24]**

VRAAG 4

'n Logistiesbevolkingsmodel word beskryf deur $\frac{\Delta P}{P} = -0,000\ 147\ P + 0,103$

- 4.1 Gee die waarde van die intrinsieke groeikoers vir hierdie model. (2)
- 4.2 Bereken die waarde van die dravermoë (korrek tot die naaste heelgetalwaarde) vir hierdie model. (4)
- 4.3 Bepaal die bevolkingsgrootte (korrek tot die naaste heelgetalwaarde) wanneer die groeikoers 0,095 is. (4)
- 4.4 Bereken die bevolking na 15 siklusse vir hierdie model as $P_0 = 12$. Gebruik 'n dravermoë van 700 en rond die finale antwoord af tot die naaste heelgetalwaarde. (6)
- [16]**

VRAAG 5

Die Kgalagadi Oorgrens Nasionale Park lê aan weerskante van die grens tussen die Noord-Kaap en Botswana.

Daar is tans 24 000 meerkatte wat in die Park woon, wat 80% van die Park se dravermoë is. Wyfies vorm ongeveer 70% van die meerkatbevolking, maar slegs alfawyfies (wat 15% van die wyfies is) paar. Alfawyfies het 4 werpsels per jaar en elke werpsel het 'n gemiddelde grootte van 3 kleintjies. Ongeveer 60% van die kleintjies oorleef tot volwassenheid.

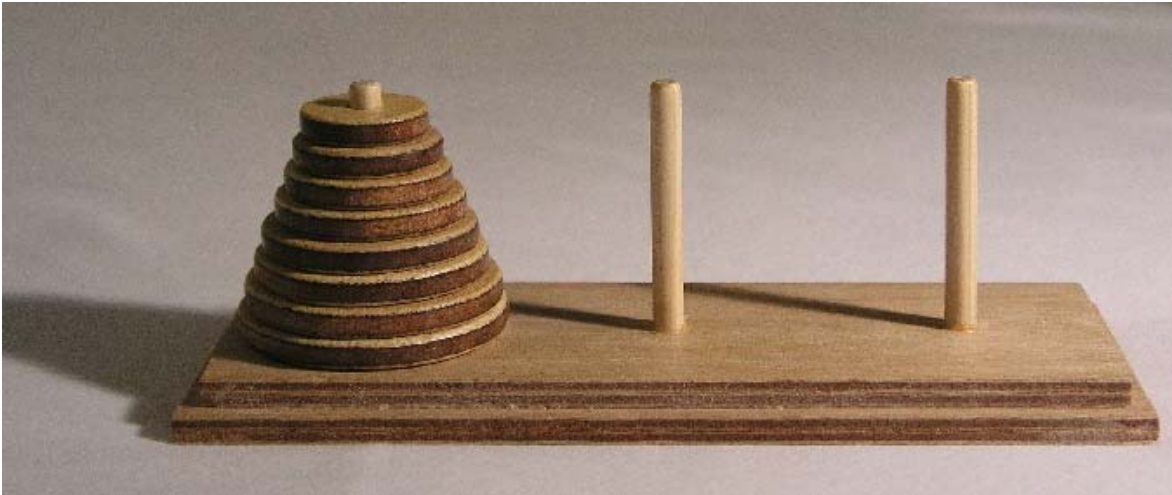
Die belangrikste roofdier wat meerkatte jag, is die rooijakkals. Daar is tans 1 000 jakkalse in die Park, waarvan die helfte wyfies is. Jakkalswyfies het een werpsel kleintjies per jaar.

Die parameters $b = 0,00056$ en $f = 0,1116$ word gegee.

- 5.1 Bereken die dravermoë van die Park vir die meerkatbevolking. (2)
- 5.2 Bereken hoeveel meerkatte hierdie jaar na verwagting deur die jakkalse doodgemaak sal word. (4)
- 5.3 Bereken die jaarlikse intrinsieke groeikoers, korrek tot drie desimale plekke, vir die meerkatte. (6)
- 5.4 Bereken hoeveel oorlewende kleintjies daar is vir 'n gemiddelde werpsel van 'n jakkalswyfie. (8)
- [20]**

VRAAG 6

Die **Toring van Hanoi** is 'n bekende wiskundige raaisel wat in die laat 19^{de} eeu deur Edward Lucas gewild gemaak is. Al die ringe oor die linkerpen moet een-een verwyder word en oor een van die ander twee penne geplaas word. In die proses om die ringe te verwyder, en in die eindproduk, mag 'n groter ring nooit bo-op 'n kleiner ring geplaas word nie.



As die stel uit drie ringe bestaan, is 'n minimum van 7 skuiwe nodig.

As die stel uit vier ringe bestaan, is 'n minimum van 15 skuiwe nodig.

As die stel uit vyf ringe bestaan, is 'n minimum van 31 skuiwe nodig.

As die stel uit ses ringe bestaan, is 'n minimum van 63 skuiwe nodig.

- 6.1 Gee die minimum getal skuiwe wat vir 'n stel van sewe ringe nodig is. (2)
- 6.2 Stel 'n **eerste**orde-rekursieformule op wat die minimum getal skuiwe wat nodig is, sal genereer. (4)
- 6.3 Stel 'n **tweede**orde-rekursieformule op wat die minimum getal skuiwe wat nodig is, sal genereer. (8)

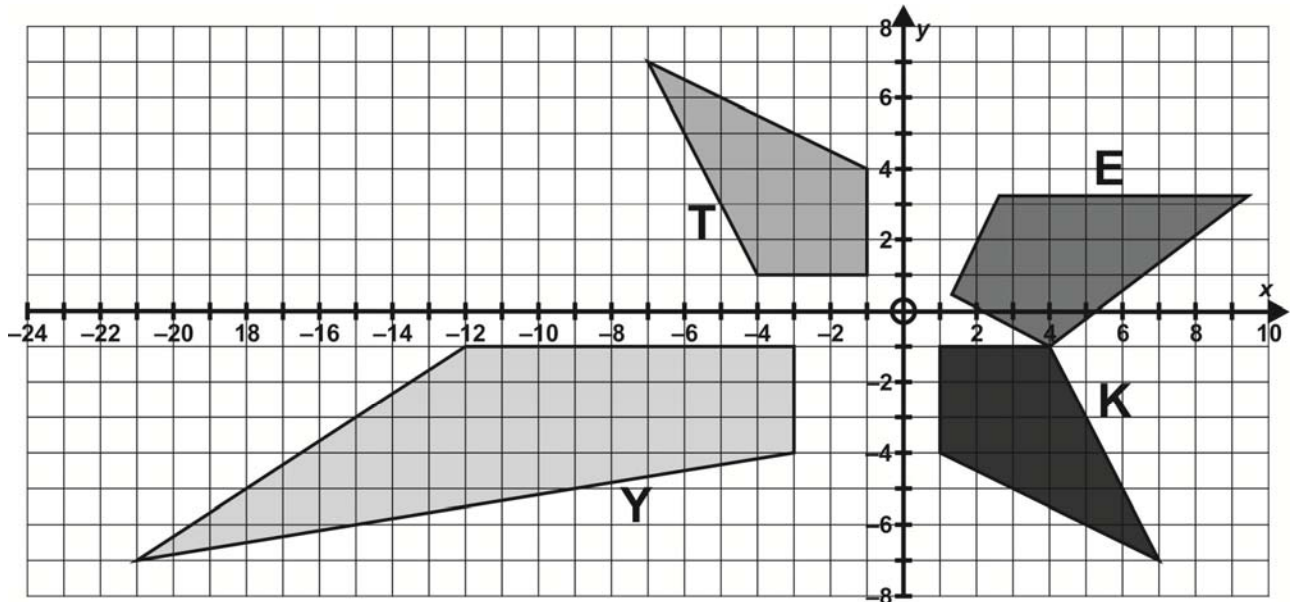
[14]

Totaal vir Module 3: 100 punte

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.1 In die diagram hieronder is figuur K op drie verskillende maniere getransformeer.



- (a) Noem twee verskillende maniere om K te transformeer sodat sy beeld T is. (4)
- (b) Gee die matriks wat K op Y sal afbeeld. (4)
- (c) K word met $63,13^\circ$ deur die oorsprong geroteer sodat sy beeld E is. Gebruik 'n matriksvergelyking om die koördinate (korrek tot twee desimale plekke) van die beeld van die punt $(1; -4)$ te bereken. (6)

1.2 Skets die volgende transformasies van K op die **Antwoordblad** wat voorsien is:

- (a) 'n Vergroting, middelpunt die oorsprong, met 'n skaalfaktor van -2 . (4)
- (b) 'n Dwarsdruk (*shear*) van skaalfaktor 2, met die y-as as die invariante lyn. (4)

[22]

VRAAG 2

2.1 Gee die numeriese waarde van die determinant van die volgende matrikse:

(a) 'n Identiteitsmatriks (2)

(b) 'n Matriks waarin een kolom slegs uit nulle bestaan (2)

(c) 'n Matriks waarin een ry 'n veelvoud van 'n ander ry is (2)

2.2 'n Drie-by-drie-matriks het 'n determinant van k . Gee die waarde van die determinant van die matriks onder die volgende omstandighede in terme van k :

(a) Die getransponeerde matriks (2)

(b) Enige twee kolomme in die matriks word omgeruil (2)

(c) Elke element in die matriks word met 'n faktor van 2 vermenigvuldig (4)

[14]

VRAAG 3

3.1 Die stel gelyktydige vergelykings moet opgelos word deur matriksvermenigvuldiging te gebruik:

$$2x + y + 2z = 10 \quad 4x + y + z = 4 \quad 3y - z = -2$$

STAP 1:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (A)$$

STAP 2:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{20} (B)(A)$$

STAP 3:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C$$

Skryf die elemente van die matrikse A, B en C neer. (10)

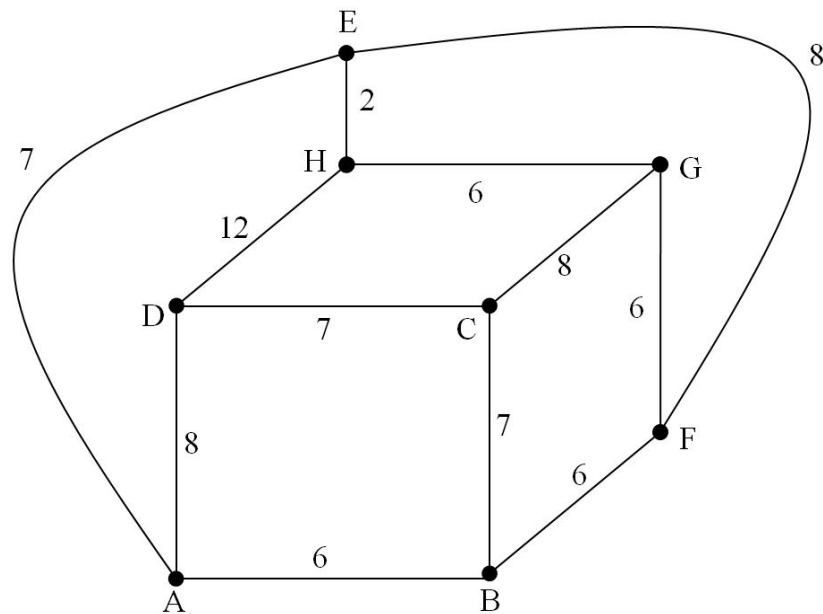
3.2 'n Matriks M word **idempotent** genoem as dit die identiteit $M = M^2 = M^3 = \dots M^n$ bevredig.

Bereken die heelgetalwaarde(s) van b as die matriks $\begin{pmatrix} b & b & 2b \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ idempotent is. (8)

[18]

VRAAG 4

Beskou die gegewe grafiek en beantwoord die vrae wat volg:



- 4.1 Is dit 'n reëlmatige grafiek? Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)
- 4.2 Dit is duidelik dat 'n Euler-**kring** NIE in die grafiek bestaan nie, aangesien al die nodusse van 'n onewe graad is. Bepaal of 'n Euler-**pad** in die grafiek bestaan. Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)
- 4.3 Begin en eindig by nodus A en bepaal 'n bogrens vir die grafiek deur die Naastebuarpunt-Algoritme te gebruik. Dui die volgorde waarin skakels gekies word, sowel as die gordellengte van hierdie bogrens duidelik aan. (10)
- 4.4 Daar word algemeen aanvaar dat 'n 'goeie' Hamilton-kring ongeveer 80% van die gordellengte van die bogrens vorm deur by dieselfde nodus te begin en te eindig soos deur die kring vereis. Begin by A en bepaal 'n goeie Hamilton-kring vir hierdie grafiek deur inspeksie. Gee die kring en sy lengte. (8)

[22]

VRAAG 5

Drie grafieke word gegee in die vorm van vyf-by-vyf-nodusmatrikse.

Matriks G

	G ₁	G ₂	G ₃	G ₄	G ₅
G ₁			5		
G ₂				3	8
G ₃	5				
G ₄		3			6
G ₅		8		6	

Matriks H

	H ₁	H ₂	H ₃	H ₄	H ₅
H ₁					5
H ₂			5		
H ₃		8			8
H ₄					6
H ₅	5		8	6	

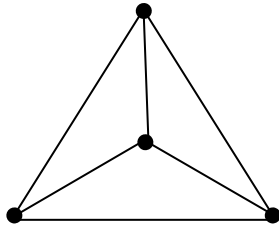
Matriks K

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅
K ₁		3		5	4
K ₂	3				
K ₃				8	
K ₄	5		8		6
K ₅	4			6	

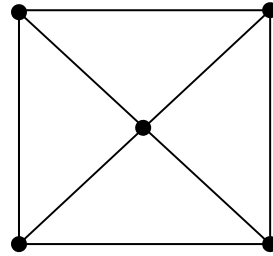
- 5.1 Teken 'n grafiek van matriks K. Dui die gewig van elke skakel in die grafiek duidelik aan. (6)
- 5.2 Dui aan watter matriks 'n grafiek verteenwoordig wat samehangend is, maar nie eenvoudig is nie. Gee 'n rede vir jou antwoord. (4)
- 5.3 Dui aan watter matriks 'n grafiek verteenwoordig wat nie samehangend is nie. Gee 'n rede vir jou antwoord. (4)
- [14]**

VRAAG 6

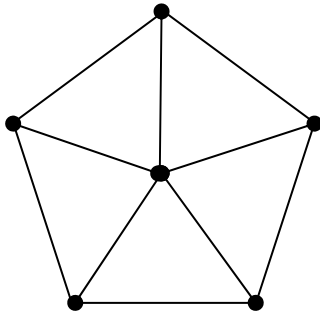
Wielgrafieke bestaan uit 'n sentrale nodus wat omring word deur 'n ring randnodusse. Elke randnodus word direk met die sentrale nodus verbind, sowel as met slegs twee aangrensende randnodusse. Vier wielgrafieke is hieronder geskets:



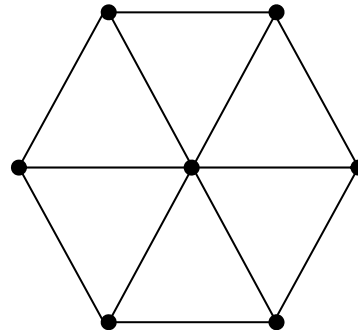
W_4 : 4 nodusse
6 skakels
3 inwendige gebiede



W_5 : 5 nodusse
8 skakels
4 inwendige gebiede



W_6 : 6 nodusse
10 skakels
5 inwendige gebiede



W_7 : 7 nodusse
12 skakels
6 inwendige gebiede

6.1 Gee vir 'n wielgrafiek W_n , waar n die getal nodusse is, in terme van n :

- (a) Die getal inwendige gebiede (2)
- (b) Die getal skakels in die grafiek (2)
- (c) Die minimum getal skakels wat bygevoeg moet word om 'n Euler-kring vir onewe waardes van n te skep (2)

6.2 Skets die grafiek W_3 en toon die korrekte getal nodusse, skakels en inwendige gebiede duidelik.

(4)
[10]

Totaal vir Module 4: 100 punte

Totaal: 300 punte