



GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2015

**GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE
KERNMODULE: CALCULUS EN ALGEBRA**

Tyd: 2 uur

200 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 6 bladsye, 'n Inligtingsboekie van 2 (i – ii) bladsye en 'n Antwoordblad van 2 bladsye (i – ii). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
 2. Nie-programmeerbare en nie-grafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
 3. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
 4. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
 5. Trigonometriese berekeninge moet gedoen word deur radiale te gebruik en antwoorde moet in radiale gegee word.
 6. Rond jou antwoorde af tot twee desimale syfers, tensy anders aangedui.
-

VRAAG 1

1.1 Los op vir x en toon jou berekeninge:

(a) $e^{\pi x} - 3 = 0$ (4)

(b) $|\tan x| = 2 \quad x \in (0; 2\pi)$ (6)

(c) Bepaal die waarde van n indien $x = \frac{1}{2}$ 'n oplossing is vir die vergelyking:
 $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2 x^n = -2$ (4)

1.2 'n Koppie Earl Grey-tee word by 'n restaurant aan Vusi bedien. Die temperatuur (P) in $^{\circ}\text{C}$ van die tee namate dit met tyd (t) in minute afkoel, kan gemodelleer word deur die funksie:

$$P = 70 \times 1,2^{-t} + 22$$



- (a) Bepaal:
- (1) die aanvanklike temperatuur van die tee. (2)
 - (2) die kamertemperatuur. (2)
- (b) Vusi kan sy tee drink wanneer die temperatuur 55°C bereik, maar sal nie die tee drink as die temperatuur onder 40°C daal nie.
- Gee die tydinterval (t) waarin Vusi sy tee kan drink. (7)

[25]

VRAAG 2

Bewys deur wiskundige induksie dat $5^{2n} - 1$ deelbaar is deur 8 vir elke positiewe heelgetal n .

[14]

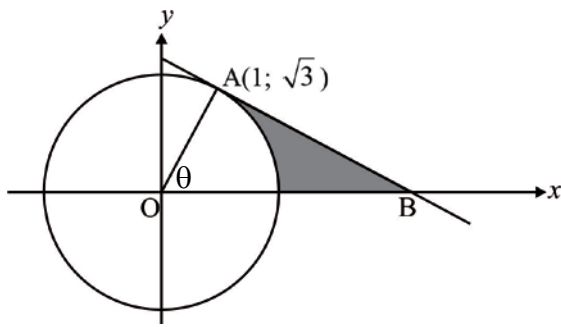
VRAAG 3

3.1 Bepaal die reële deel van die komplekse getal in terme van a en b :

$$\frac{a+bi}{a-bi} \quad (7)$$

- 3.2 Een oplossing vir die vergelyking $2x^3 + px^2 + qx - 58 = 0$ is $3 - 7i$.
 Bereken die waardes van p en q onderskeidelik. (10)

[17]

VRAAG 4


Die punt $A(1; \sqrt{3})$ lê op 'n sirkel met middelpunt die oorsprong. 'n Raaklyn aan die sirkel word by A getrek en hierdie lyn sny die x -as by B. $\angle AOB = \theta$.

4.1 Bereken θ en die lengte van die radius van die sirkel. (6)

4.2 Bereken vervolgens die oppervlakte wat tussen die sirkel, die raaklyn en die x -as ingesluit word, aangedui deur die gearseerde gebied in die diagram. (9)

[15]

VRAAG 5

Die funksies p , q en r word gedefinieer, vir $x \in R$, deur:

$$p(x) = \frac{1}{2+3x}; \quad x \neq -\frac{2}{3} \quad q(x) = x^2 + 6 \quad r(x) = 2x - 5$$

5.1 Bepaal:

(a) $p'(x)$ (4)

(b) $p^{-1}(x)$ (4)

5.2 Druk die volgende as saamgestelde funksies van p , q en/of r uit:

(a) $\frac{1}{2+3(x^2+6)}$ (3)

(b) $\frac{2}{2+3x} - 5$ (3)

5.3 Gegee: $g(x) = \frac{q(x)}{r(x)}$. Bepaal die koördinate van die stasionêre punte van g . (8)

[22]

VRAAG 6

6.1 Gegee: $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + px + 4}$

(a) Vir watter waarde(s) van p sal die grafiek van f die volgende hê?

(i) een x -afsnit (4)

(ii) een vertikale asimptoot (3)

(b) Gegee: $p = -5$

(i) Los op vir x indien $f(x) \geq 0$. (7)

(ii) Skets die grafiek van f , met inbegrip van afsnitte met die asse en asymptote op die Antwoordblad. Stasionêre punte word nie verlang nie. (10)

6.2 Gegee:
$$g(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 3 & \text{as } x < 0 \\ |x - 3| & \text{as } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Toon berekeninge met die korrekte notasie en bewys dat g differensieerbaar is by $x = 0$. (10)

(b) Skets g en toon die stasionêre punt en afsnitte met die asse op die Antwoordblad. (8)
[42]

VRAAG 7

7.1 Jy moet die kleinste positiewe oplossing bepaal vir die vergelyking:

$$3(x-2)^2 - 1 = \frac{4}{x}$$

(a) Toon dat 'n oplossing bestaan vir die definisieversameling $x \in (2; 3)$. (3)

(b) Bepaal vervolgens hierdie oplossing deur Newton se metode te gebruik, korrek tot 6 desimale plekke. (7)

7.2 Gegee: $\sin y = x$ en $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

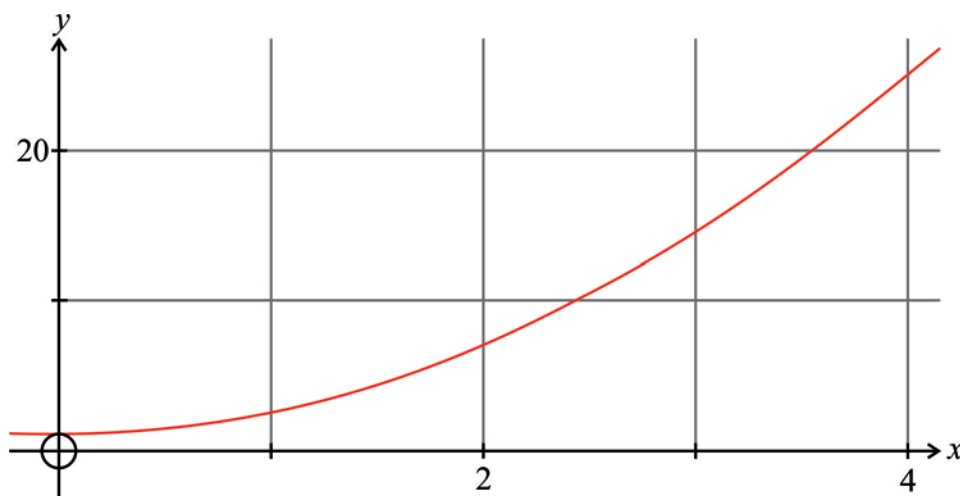
(a) Bepaal 'n uitdrukking vir $\frac{dy}{dx}$. (5)

(b) Evalueer vervolgens $\frac{dy}{dx}$ wanneer $x = 0,5$. (4)

[19]

VRAAG 8

Vanessa bepaal die oppervlakte wat tussen $x = 0$ en $x = 4$ deur die kromme $y = qx^2 + 1$ en die x -as ingesluit word deur Riemann-somme te gebruik.



Sy stel vas dat as sy n reghoeke gebruik, 'n uitdrukking vir die oppervlakte vereenvoudig tot:

$$A = 36 + \frac{48}{n} + \frac{16}{n^2}$$

8.1 Bepaal die presiese oppervlakte. (2)

8.2 Bereken die persentasie fout indien 16 reghoeke gebruik word. (4)

8.3 Bepaal volgens enige metode die waarde van q . (7)

[13]

VRAAG 9

9.1 Integreer stuksgewys: $\int x(2x-1)^{\frac{2}{3}} dx$ (8)

9.2 Bepaal die integraal:

$$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}} dx \quad (7)$$

9.3 'n Identiteit word gegee: $(\sec x - \tan x)^2 = a \sec^2 x + b \sec x \tan x + c$

(a) Bepaal die waardes van a , b en c . (5)

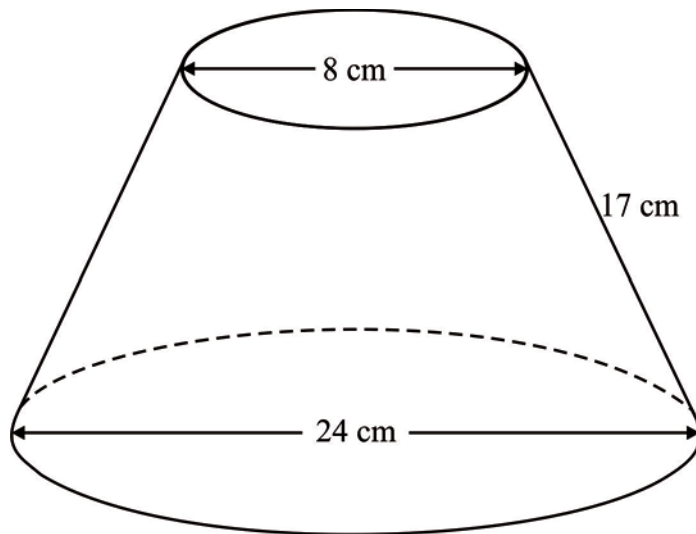
(b) Bepaal vervolgens die integraal:

$$\int (\sec x - \tan x)^2 dx \quad (5)$$

[25]

VRAAG 10

Die diagram toon 'n afgeknotte keël met basisdeursnee 24 cm, topdeursnee 8 cm en skuinshoogte 17 cm. Dit is geskep deur 'n sekere funksie om die x -as te roteer.



Skryf met behulp van 'n geskikte skets op 'n Cartesiese vlak die integraal neer wat die volume van die afgeknotte keël sal voorstel. Jy hoef nie die integraal te evalueer nie.

[8]**Totaal: 200 punte**